P3. ¡Y se hizo la luz!

La energía eléctrica empezó a utilizarse a partir del descubrimiento por Michael Faraday de la ley de inducción electromagnética en 1833, aunque en aquel momento no podía sospecharse la enorme trascendencia del descubrimiento. En menos de medio siglo se desarrollaron las tecnologías para la producción y aprovechamiento de la energía eléctrica.

En las centrales hidroeléctricas se genera esta energía mediante un salto de agua, es decir transformando en eléctrica la energía potencial gravitatoria del agua. La primera central de este tipo funcionó en Wisconsin (EEUU) en el año 1882. En China se ha puesto recientemente en marcha la central hidroeléctrica más grande del mundo (presa de las Tres Gargantas), con una potencia de 22,5 GW. En Galicia puede citarse la central de San Esteban, en el río Sil, la más potente de Europa cuando fue inaugurada en 1956, con 0,26 GW. La figura 1 muestra las partes principales de una central hidroeléctrica.

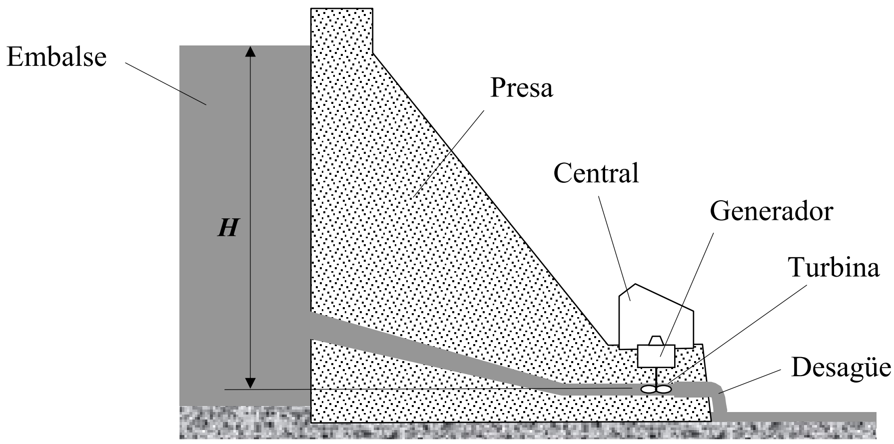

Fig. 1

La energía eléctrica ha sustituido en muchos casos a la térmica (máquinas de vapor) en la industria, y la tendencia actual es electrificar el transporte de mercancías (ferrocarril) y pasajeros. El primer motor eléctrico de potencia apreciable fue inventado por Tesla en 1888, pasando así la energía eléctrica a ser protagonista de la segunda revolución industrial.

También es bien conocido el invento de la lámpara de incandescencia (patentada por Edison en 1879). En la década siguiente se inició el alumbrado público mediante energía eléctrica en diversas ciudades norteamericanas y europeas, extendiéndose rápidamente a las viviendas. Quizá por ello el invento de la bombilla eléctrica se considera uno de los más trascendentales del siglo XIX. Aunque las bombillas tradicionales han sido sustituidas por fuentes de luz de mayor rendimiento energético (bajo consumo), bien merece nuestra atención la lámpara de incandescencia, como la vieja bombilla de la figura 2.

Fig. 2

En este problema se plantean algunas cuestiones relacionadas con la energía eléctrica, su producción y sus aplicaciones.

Considere una central hidroeléctrica de desnivel H, entre el nivel del embalse y la salida de las turbinas. La velocidad del agua, tanto antes del salto como después de atravesar la turbina, en el desagüe, es prácticamente nula. El caudal de agua (volumen por unidad de tiempo) que alimenta la turbina es C . la densidad del agua es d.

a) Suponiendo que el rendimiento energético[1] de la central es η, determine la potencia eléctrica que produce, P_e.

[1] Se define rendimiento energético como la relación entre la cantidad de energía útil resultante de un proceso y la cantidad aportada al mismo.

Los generadores de las centrales hidroeléctricas son sistemas muy complejos. En esencia, la rotación del generador, accionado por la turbina, produce un campo magnético giratorio que induce corriente eléctrica en uno o varios conjuntos de espiras en reposo.

Consideremos, como modelo muy simplificado, una bobina fija de N espiras de área A, cada una, en presencia de un campo magnético uniforme de intensidad B que gira con velocidad angular ω, como se muestra en la figura 3.

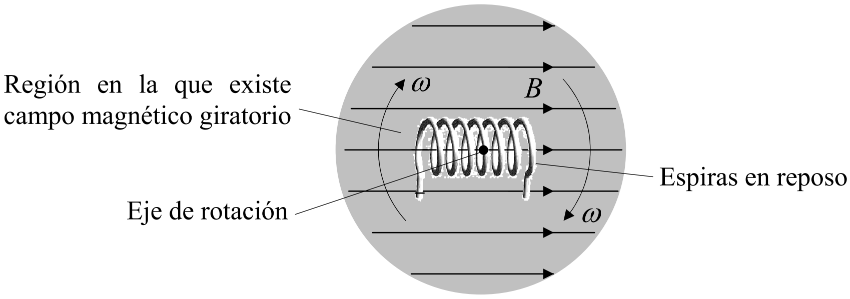

Fig. 3

b) Determine el flujo magnético que atraviesa la bobina, Φ, y la fuerza electromotriz inducida entre sus bornes, ε.

El surtidor de una fuente pública expulsa un chorro vertical de agua mediante una bomba impulsora que trabaja en circuito cerrado. La bomba eleva un caudal $C' = 2{,}0 \times 10^{-3}$ m^3/s hasta una altura $h = 5{,}0$ m respecto a la superficie libre del agua, con un rendimiento de bombeo $\eta' = 0{,}8$. La densidad del agua es $d = 1.0 \times 10^3$ kg / m^3.

c) Determine y calcule la potencia consumida por el motor eléctrico de la bomba.

El motor de la bomba consume la potencia correspondiente a una parte ΔH del desnivel H de la central que le suministra la electricidad. Las características de la central[2] son: altura de caída del agua $H = 902$ m, caudal $C = 2{,}59 \times 10^{-1}$ m^3/s y rendimiento $\eta = 0{,}87$.

d) Determine y calcule ΔH.

El filamento de una bombilla de incandescencia es un fino hilo cilíndrico de Wolframio enrollado en hélice. Cuando se alimenta con una tensión V, su resistencia eléctrica a la temperatura de trabajo es R.

Si el filamento incandescente se comportase como un *cuerpo negro*, la potencia radiante emitida vendría dada por la ley de Stefan-Boltzmann: $P_n = \sigma S T^4$, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann, S es el área de la superficie total emisora, y T su temperatura absoluta. En la práctica, dependiendo del material y de la temperatura, la potencia radiante emitida por el filamento, P_f, es inferior a P_n en un factor $e < 1$, llamado *emisividad*, es decir la potencia real emitida es $P_f = e\sigma S T^4$. Asuma que la potencia eléctrica que consume la bombilla , P_c, es igual a la que emite, P_f.

e) Determine las expresiones del radio, r, y de la longitud total, l, del filamento de una bombilla, en función de P_c, V, e, σ, T y de la resistividad[3] del material, ρ, a la temperatura de trabajo.

f) Calcule los valores numéricos de r y de l del filamento de una bombilla de $P_c = 60$ W y $V = 220$ V.

Datos: $T = 2500$ K ; $\rho = 7{,}4 \times 10^{-7}$ Ω m ; $e = 0{,}4$; $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W m^{-2}K^{-4}.

[2] Central hidroeléctrica de Ip, en Canfranc (Huesca), de 2 MW de potencia. El agua desciende por una tubería de presión desde un lago (*ibón* de Ip), mucho más elevado que la central.

[3] La relación entre la resistencia R de un conductor cilíndrico y la resistividad ρ del material de que está construido es $R = \rho l/a$, donde l es la longitud del cilindro y a es el área de su sección circular.

Solución

a) Supongamos un elemento de masa de agua Δm, inicialmente en reposo, que desciende una altura H desde la superficie libre del embalse. Idealmente, toda la energía potencial gravitatoria perdida por este Δm, se transforma en energía eléctrica, ya que su energía cinética final es prácticamente nula. El proceso de conversión se realiza en el generador, movido por la turbina. Es decir, se produce una energía eléctrica

$$\Delta E = \Delta m\, gH = d\,\Delta V\, gH$$

Donde d es la densidad del agua y ΔV es el volumen que ocupa Δm. Para obtener la energía producida por unidad de tiempo (potencia teórica, P_t) basta dividir por el tiempo Δt que tarda el volumen ΔV en atravesar una sección transversal de la corriente

$$P_t = \frac{\Delta E}{\Delta t} = dgH\frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Como $\Delta V/\Delta t$ es el caudal de agua que alimenta la central, C, queda $P_t = dgHC$. Teniendo en cuenta el rendimiento de la central, la potencia eléctrica P_e que produce es, finalmente

$$\boxed{P_e = \eta dgHC} \qquad (1)$$

b) De acuerdo con el sencillo modelo que describe el enunciado, el flujo del campo magnético uniforme, B, que gira con velocidad angular ω, y que atraviesa un conjunto de N espiras de área A es

$$\boxed{\Phi = NAB\cos\omega t}$$

En virtud de Faraday, la fem inducida viene dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = NAB\,\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t}$$

c) El bombeo de un caudal C' hasta una altura h requiere el consumo de una potencia eléctrica P'. Este proceso es el inverso al *turbinado* de un caudal C de agua para producir energía eléctrica, estudiado en el apartado (a). Por tanto, teniendo en cuenta el rendimiento del proceso, puede escribirse

$$\boxed{P' = \frac{dghC'}{\eta'}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P' = 123\ \mathrm{W}} \qquad (2)$$

d) Una parte de la potencia eléctrica generada por la central, ΔP_e, tiene que destinarse a la alimentación del motor de la bomba de la fuente, es decir

$$\Delta P_e = P' \qquad (3)$$

Por otra parte, a ΔP_e le corresponde una altura ΔH que se obtiene a partir de (1)

$$\Delta P_e = \eta dg\Delta H\, C \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta (2), (3) y (4) se tiene

$$dgh\,C' = \eta\eta' dg\Delta HC$$

De donde la fracción que se pide y su valor numérico son

$$\boxed{\Delta H = \frac{1}{\eta\eta'}\frac{C'}{C}h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta H = 5{,}5\times 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$

e) Según el enunciado, la potencia emitida por la bombilla es

$$P_f = e\sigma S T^4$$

donde S es la superficie total emisora, es decir la superficie lateral de un cilindro de longitud l y radio r.

$$S = 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad P_f = 2\pi e\sigma r l T^4$$

Igualando la potencia emitida a la consumida, P_c, se obtiene

$$l = \frac{P_c}{2\pi e\sigma r T^4} \tag{5}$$

Por otra parte, la potencia eléctrica consumida por una resistencia R es

$$P_c = \frac{V^2}{R}$$

con $$R = \rho \frac{l}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad P_c = \pi \frac{r^2 V^2}{\rho l}$$

Teniendo en cuenta (5)

$$P_c = 2\pi^2 \frac{e\sigma r^3 V^2 T^4}{\rho P_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \left(\frac{\rho P_c^2}{2\pi^2 e\sigma V^2 T^4} \right)^{1/3}}$$

Sustituyendo en (5) se obtiene la longitud del hilo

$$\boxed{l = \left(\frac{P_c V^2}{4\pi \rho e^2 \sigma^2 T^8} \right)^{1/3}}$$

f) Con los valores numéricos del enunciado

$$\boxed{r = 15\ \mu\text{m}}$$

$$\boxed{l = 0{,}74\ \text{m}}$$