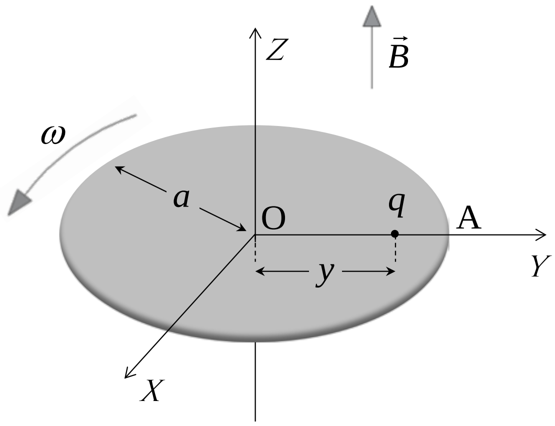
P3 Entre Barlow y Faraday

Peter Barlow (1776-1862) y Michael Faraday (1791-1867) fueron dos físicos británicos pioneros en el desarrollo de los primeros motores y generadores eléctricos. El primero de ellos construyó, en 1822, un motor eléctrico conocido como “rueda de Barlow”. Poco después, en 1831, Faraday desarrolló el primer generador eléctrico, conocido como “disco de Faraday”. El elemento básico, en ambos, es una rueda conductora que gira alrededor de su eje en presencia de un campo magnético.

Considere un disco conductor de radio a que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω en una región donde existe un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y paralelo a dicho eje. Véase la figura.



a) Determine la fuerza que el campo magnético ejerce sobre un electrón, de carga $q=-e$, colocado en el eje Y a distancia y del centro, tal como se muestra en la figura.

b) Como consecuencia de dicha fuerza los electrones se van desplazando. ¿Hacia dónde?

c) El desplazamiento de los electrones provoca que la densidad de carga en el disco no sea homogénea. Cuando se alcanza el estado estacionario y los electrones dejan de moverse, calcule la fuerza eléctrica sobre un electrón colocado en la misma posición que el de la figura.

d) Si se conecta un voltímetro de contactos deslizantes (a modo de escobillas) entre los puntos O y A del disco, ¿en cuál de los dos puntos habría que poner el polo positivo y en cuál el negativo del voltímetro para que éste diera una lectura positiva? ¿Cuál sería su lectura? Tenga en cuenta que la relación entre la fuerza electromotriz, ε, y la fuerza eléctrica, $\vec{F_e}$, es:

$$\varepsilon = -\int_{O}^{A} \frac{\vec{F_e}}{q}\,\vec{dl} \qquad (1)$$

donde la integral se calcula a lo largo de una trayectoria que une los puntos O y A, y $\vec{dl}$ es un vector tangente a la trayectoria en todo punto y tiene módulo infinitesimal (tan pequeño como se quiera).

e) ¿Podría obtenerse el mismo resultado que en el apartado anterior utilizando la ley de inducción de Faraday sobre un sector circular ("quesito") del disco? Justifique su respuesta haciendo los cálculos matemáticos oportunos.

P3 Solución

a) Por estar el disco girando con una velocidad angular ω, un electrón que se encuentre en la posición indicada tendrá una velocidad lineal

$$\vec{v} = \omega\hat{k} \times y\,\hat{j} = -\omega y\,\hat{i}$$

Según la ley de fuerzas de Lorentz: $\overrightarrow{F_m} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, la fuerza magnética sobre el electrón de carga $q = -e$ será

$$\overrightarrow{F_m} = -e\left(-\omega y\,\hat{i}\right) \times B\hat{k} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{F_m} = -e\,\omega B y\;\hat{j}$$

b) Los electrones se ven desplazados hacia el centro del disco.

El resultado es general e independiente de la posición radial que ocupen. De hecho, para cualquier punto de una circunferencia de radio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, actúa una fuerza radial de módulo $F(r) = -e\omega B r$. En consecuencia, se produce una acumulación de electrones en el centro del disco, que se cargará negativamente, y un defecto de electrones en el borde, el cual se cargará positivamente.

c) El estado estacionario se alcanzará cuando los electrones acumulados en el centro del disco y la carga positiva que su defecto provoca en el borde, sean capaces de producir un campo eléctrico y, por tanto, una fuerza eléctrica igual y de sentido contrario a la fuerza magnética.

En esta situación de equilibrio se tiene:

$$\overrightarrow{F_e} = -\overrightarrow{F_m} = e\,\omega B y\;\hat{j} \qquad (2)$$

d) Puesto que el campo eléctrico se establece apuntando al centro del disco, y el campo eléctrico siempre apunta hacia potenciales decrecientes, el voltímetro tendría que conectarse con el polo negativo en el centro (punto O) y el positivo en el borde (punto A).

El voltímetro medirá la fuerza electromotriz entre dichos puntos que podemos obtener de (1) teniendo en cuenta la fuerza eléctrica obtenida en (2):

$$\varepsilon = -\int_{O}^{A} \frac{\overrightarrow{F_e}}{q} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{0}^{a} \frac{e\omega B y\,\hat{j}}{-e} \cdot dy\,\hat{j} = \omega B \int_0^a y\,dy = \omega B\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^a \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\omega B a^2$$

e) El área de un sector circular de radio a y ángulo φ radianes es $S = a^2\varphi/2$, donde el ángulo se puede expresar como: $\varphi = \omega t$. Y el flujo de campo magnético a través de dicha superficie es

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{B a^2 \omega t}{2}$$

Finalmente si se aplica la ley de inducción de Faraday, queda:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2}\omega B a^2$$

Por tanto, el resultado, en valor absoluto, es el mismo que se obtuvo en el apartado c) aplicando la ley de Lorentz. El signo negativo viene de la elección arbitraria que se ha hecho para la orientación del vector superficie $\vec{S}$.

---

* Nota: Finalmente indicar que existe un solapamiento entre la ley de fuerzas de Lorentz y la ley de inducción de Faraday expresada tal cual se ha utilizado en la solución del apartado d) de este problema. Es decir, todos los casos en los cuales el movimiento de un conductor es el que produce una variación de flujo magnético, se pueden resolver con ambas expresiones. Lo realmente nuevo en la ley de inducción de Faraday son las situaciones en que el campo magnético varía con el tiempo.