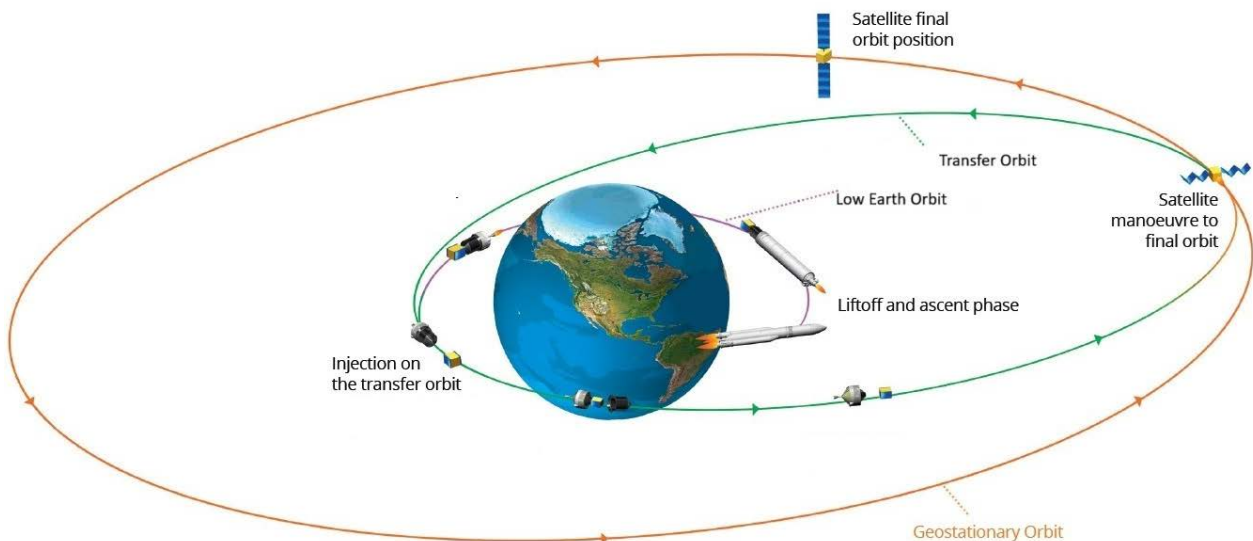


P3. Maniobra orbital de Hohmann

Una característica de las maniobras orbitales son las alteraciones rápidas o lentas que se aplican a la velocidad orbital. Los principios de conservación de la mecánica indican que basta aplicar un único cambio brusco, $\Delta \vec{v}$ (un empujón del motor), para cambiar los parámetros de la órbita. En particular, una forma eficiente de aumentar la altura de una órbita consiste en incrementar bruscamente la velocidad tangencial del satélite.

Standard Ariane 5 mission profile for geostationary transfer orbit



© Arianespace - Ariane 5 - September 2019

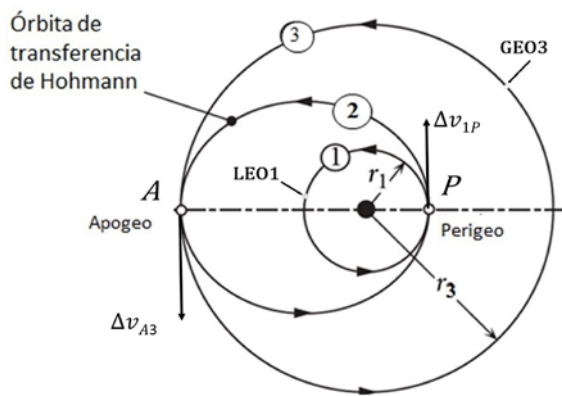
En este problema se analiza la maniobra orbital de Hohmann¹ que permite mover un satélite desde una órbita circular a baja altura alrededor de la tierra LEO (*Low Earth Orbit*) hasta una órbita ecuatorial geoestacionaria GEO (*Geosynchronous Equatorial Orbit*). Esto se consigue mediante dos impulsos bruscos en la velocidad del satélite.

Consideremos primero dos órbitas ecuatoriales circulares diferentes de un satélite, la primera a baja altitud, que llamaremos **LEO1**, y la segunda en una órbita ecuatorial geoestacionaria, que llamaremos **GEO3**.

- Considere primero que la órbita **LEO1** está a una altura z_1 sobre la superficie terrestre. Escriba (en función de G , $M_{\oplus}$, m y del radio de la órbita r_1) las expresiones de la velocidad del satélite v_1 , su periodo T_1 , su energía total E_1 y su momento angular respecto a la Tierra L_1 .
- Considere ahora el satélite en la órbita geoestacionaria **GEO3**. Escriba (en función de G , $M_{\oplus}$, m y de la duración del día terrestre $T_{\oplus}$) las expresiones de su velocidad v_3 , radio r_3 , energía total E_3 y momento angular respecto a la Tierra L_3 .

¹ Así llamada en honor del ingeniero alemán Walter Hohmann, un adelantado a su tiempo, que la propuso en 1925. Walter Hohmann, "Die Erreichbarkeit der Himmelskörper". R. Oldenbourg (Munich - Berlin), 1925. Versión inglesa: "The Attainability of Heavenly Bodies", NASA TT F-44 (1960).

A continuación, estudiaremos la maniobra de Hohmann que permite al satélite pasar desde la órbita circular inicial LEO1 a la circular final GEO3 viajando por la llamada *órbita de transferencia*.



La maniobra orbital de Hohmann consigue mover un satélite desde la órbita circular ① de altura z_1 sobre la superficie de la Tierra a otra circular ③ de altura z_3 mediante dos empujones bruscos aplicados en los puntos P y A. La trayectoria elíptica intermedia ②, por la que ha de viajar el satélite, tendrá su perigeo P a una distancia r_1 y su apogeo A a una distancia r_3 del centro de la Tierra.

Resumiendo, la maniobra requiere que $r_P = r_1$ y $r_A = r_3$, siendo r_P y r_A los radios de perigeo y apogeo de la órbita elíptica de transferencia ②, cuyo foco estará en el centro de la Tierra.

Recuerde que en cada trayectoria del satélite no sólo se conserva la energía total. Al moverse debido a una fuerza central también se conserva su momento angular.

- c) Determine la energía total E y el momento angular L del satélite, así como sus velocidades v_P y v_A en los puntos P y A en la órbita elíptica de transferencia ②. Escriba sus resultados en términos de G , $M_\oplus$, m , r_P y r_A únicamente.

El brusco empujón tangencial $\Delta \vec{v}_{1P}$ a la velocidad v_1 del satélite (que está en la órbita LEO1), le dará la velocidad v_P , transfiriéndole a la órbita elíptica de transferencia ② (cuyo apogeo A estará en algún punto de la órbita circular GEO3).

La maniobra aún no ha concluido; una vez llegado al apogeo A de la órbita de transferencia ② hay que aplicar otro empujón brusco adicional $\Delta \vec{v}_{A3}$ para pasar de dicha órbita elíptica a la órbita geoestacionaria final GEO3.

- d) Determine los impulsos $\Delta v_{1P} = v_P - v_1$ y $\Delta v_{A3} = v_3 - v_A$ necesarios para poner al satélite en la órbita geoestacionaria GEO3 desde la órbita inicial LEO1, y calcule sus valores en metros por segundo.
- e) Mediante la segunda ley de Kepler (la velocidad areolar es constante) demuestre que el periodo de la órbita de transferencia es

$$T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_\oplus}}, \text{ siendo } a \text{ el semieje mayor de la elipse, } a = (r_P + r_A) / 2.$$

Determine el tiempo t_{PA} que emplea el satélite en la órbita de transferencia y calcule su valor en segundos.

Datos:

Masa del satélite m .

Constante de gravitación universal G .

Masa de la Tierra $M_\oplus$, $GM_\oplus = 398\,600 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$.

Radio de la Tierra $R_\oplus = 6378 \text{ km}$.

Área de la elipse: $A = \pi ab$, excentricidad: $e = \sqrt{1 - (b/a)^2} = (r_A - r_P) / (r_A + r_P)$.

Emplearemos los datos del *European Data Relay Satellite* (EDRS-C) de la ESA, lanzado el 6 de agosto de 2019 desde Kourou por el *Ariane Space Launch Complex*, cuya órbita de transferencia tenía el perigeo y apogeo a altitudes $z_P = 250 \text{ km}$ y $z_A = 35\,786 \text{ km}$, respectivamente.

P3. Maniobra orbital. SOLUCIÓN

- a. Considere primero que la órbita LEO1 está a una altura z_1 sobre la superficie terrestre. Escriba – en función de $G, M_\oplus, m$ y del radio de la órbita r_1 – las expresiones de la velocidad del satélite v_1 , su periodo T_1 , su energía total E_1 y su momento angular respecto a la Tierra L_1 .

La Segunda Ley de Newton para una órbita circular:

$$\frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{GM_\oplus m}{r_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}},$$

donde $r_1 = R_\oplus + z_1$ es el radio de la órbita. Como,

$$2\pi r_1 = v_1 T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1}, \quad \text{finalmente} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_\oplus}} r_1^{3/2}.$$

La energía del satélite, cinética más potencial, será $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_\oplus m}{r_1}$; sustituyendo v_1 ,

$$E_1 = -\frac{GM_\oplus m}{2r_1},$$

y su momento angular será :

$$L_1 = mr_1 v_1 = m\sqrt{GM_\oplus r_1}$$

- b. Considere ahora el satélite en la órbita geoestacionaria GEO3. Escriba – en función de $G, M_\oplus, m$ y de la duración del día terrestre $T_\oplus$ – las expresiones de su velocidad v_3 , radio r_3 , energía total E_3 y momento angular respecto a la Tierra L_3 .

Como esta órbita también es circular, podemos aplicar las relaciones entre T , r y v obtenidas anteriormente:

$$T_\oplus = 2\pi/\sqrt{GM_\oplus} r_3^{3/2} \Rightarrow r_3 = \left(\frac{GM_\oplus}{(2\pi)^2} T_\oplus^2 \right)^{1/3}$$

$$\text{como } v_3 = \frac{2\pi r_3}{T_\oplus} \Rightarrow v_3 = \left(\frac{2\pi GM_\oplus}{T_\oplus} \right)^{1/3}$$

De la misma manera,

$$E_3 = -\frac{GM_\oplus m}{2r_3} = -\frac{m}{2} \left(\frac{2\pi GM_\oplus}{T_\oplus} \right)^{2/3}$$
$$L_3 = mr_3 v_3 = m \left(\frac{(GM_\oplus)^2}{2\pi} T_\oplus \right)^{1/3}$$

- c. **Determine la energía total E y el momento angular L del satélite, así como sus velocidades v_P y v_A en los puntos P y A en la órbita elíptica de transferencia ②. Escriba sus resultados en términos de $G, M_{\oplus}, m, r_P$ y r_A únicamente.**

Esta órbita ya no es circular y se cuenta con los principios de conservación de la energía y de conservación del momento angular que implican que las energías del satélite en los puntos A y P de la órbita ② son iguales. Lo mismo ocurre con los momentos angulares,

Usando estas dos leyes de conservación se puede obtener la energía E_2 y el momento angular L_2 de la órbita de transferencia:

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{r_P}$$

Como $L_2 = mr_A v_A = mr_P v_P \Rightarrow v_A = \frac{L_2}{mr_A}$ y $v_P = \frac{L_2}{mr_P}$, que sustituidos en la conservación de la energía dan:

$$\frac{L_2^2}{2mr_A^2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_A} = \frac{L_2^2}{2mr_P^2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_P},$$

operando en esta igualdad se obtiene el valor del momento angular de la órbita de transferencia respecto a la Tierra:

$$L_2 = m\sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_P}}} = m\sqrt{\frac{2GM_{\oplus}r_A r_P}{r_A + r_P}}$$

Con lo que la ecuación de la energía $E_2 = \frac{L_2^2}{2mr_A^2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_A}$ queda:

$$E_2 = -\frac{GM_{\oplus}m}{r_A + r_P}$$

Finalmente, las velocidades en apogeo y perigeo son:

$$v_A = \frac{L_2}{mr_A} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{r_A + r_P}} \sqrt{\frac{r_P}{r_A}} \quad \text{y} \quad v_P = \frac{L_2}{mr_P} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{r_A + r_P}} \sqrt{\frac{r_A}{r_P}}.$$

- d. **Determine los impulsos $\Delta v_{1P} = v_P - v_1$ y $\Delta v_{A3} = v_3 - v_A$ necesarios para poner al satélite en la órbita geoestacionaria GEO3 desde la órbita inicial LEO1 y el tiempo t_{PA} empleado en realizar la transferencia.**

Sustituyendo los valores de v_1, v_3, v_A y v_P obtenidos arriba:

$$\begin{aligned} \Delta v_{1P} = v_P - v_1 &= \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_P}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2r_A}{r_P + r_A}} - 1 \right] \\ \Delta v_{A3} = v_3 - v_A &= \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_A}} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{2r_P}{r_P + r_A}} \right] \end{aligned}$$

$$GM_{\oplus} = 398,600 \text{ km}^3 \text{s}^{-2}, R_{\oplus} = 6,378 \text{ km}, z_P = 250 \text{ km}, \quad z_A = 35,786 \text{ km}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{1P} = v_P - v_1 &= \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_P}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2r_A}{r_P + r_A}} - 1 \right] = 2,44 \text{ km s}^{-1} \\ \Delta v_{A3} = v_3 - v_A &= \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_A}} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{2r_P}{r_P + r_A}} \right] = 1,47 \text{ km s}^{-1} \end{aligned}$$

- e. Mediante la segunda ley de Kepler – la velocidad areolar es constante – demuestre que el periodo de la órbita de transferencia es:

$$T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\oplus}}} \text{ siendo } a \text{ el semieje mayor de la elipse } a = (r_P + r_A)/(2),$$

Determine el tiempo t_{PA} que emplea el satélite en la órbita de transferencia y calcule su valor en segundos.

De acuerdo con la segunda ley de Kepler la velocidad areolar es constante

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{L_2}{2m} \Rightarrow \frac{A}{T_2} = \frac{L_2}{2m} \Rightarrow t_{PA} = \frac{mA}{L_2}$$

La ayuda dada en el enunciado,

$$A = \pi ab, \quad y \quad e = \sqrt{1 - (b/a)^2} = (r_A - r_P)/(r_A + r_P),$$

da $a = (r_A + r_P)/2$ y $b = \sqrt{r_A r_P}$. Usando el valor de L_2 obtenido en la cuestión c y operando

$$T_2 = \frac{2mA}{L_2} = \pi \sqrt{\frac{(r_P + r_A)^3}{2GM_{\oplus}}}$$

El tiempo t_{PA} que emplea el satélite en llegar de P a A por la órbita de transferencia es la mitad del periodo T_2 :

$$t_{PA} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(r_P + r_A)^3}{2GM_{\oplus}}} = 1,896 \cdot 10^4 \text{ s} = 5 \text{ h } 16 \text{ m } 1,2 \text{ s}$$