

P3. Medidas eléctricas. Solución

Determinación de la resistencia de una bobina

Considere la bobina circular de la figura de radio a , N vueltas y resistencia total R . Se la hace girar en el aire, alrededor de un eje vertical y con velocidad angular uniforme ω , en presencia del campo magnético horizontal $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{i}$

1. Determine el flujo $\Phi(t)$ del campo magnético que atraviesa la bobina en el instante t si en el instante inicial $t = 0$ la normal al plano de la bobina estaba en la dirección de $\mathbf{B}_0$. (0.5 pts)

$$\Phi(t) = N \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{S}_0 = N \pi a^2 B_0 \cos \omega t = \Phi_0 \cos \omega t, \quad \text{con}$$

$$\Phi_0 = N \pi a^2 B_0$$

2. Calcule la fuerza electromotriz instantánea $\varepsilon(t)$ y la intensidad instantánea $I(t)$ que se inducen en la bobina. (0.5+0.5 pts)

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Phi_0 \omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad \varepsilon_0 = \Phi_0 \omega$$

$$I(t) = \varepsilon(t)/R = I_0 \sin \omega t \quad \text{con} \quad I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

3. Calcule también la potencia instantánea $P(t)$ necesaria para mantener la bobina en movimiento, así como su valor medio¹. (Desprecie la autoinducción en la bobina). (0.5+0.5 pts)

$$P(t) = \varepsilon(t)I(t) = \varepsilon(t)^2/R = (\varepsilon_0^2/R) \sin^2 \omega t$$

$$\langle P \rangle = (\varepsilon_0^2/R) \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \varepsilon_0^2/2R, \quad \text{pues} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = 1/2$$

4. Determine el campo magnético inducido en el centro de la bobina $\mathbf{B}_i(t)$, el campo magnético total $\mathbf{B}(t)$ y su valor medio $\langle \mathbf{B} \rangle$. (1.0+1.0+1.0 +0.5 pts)

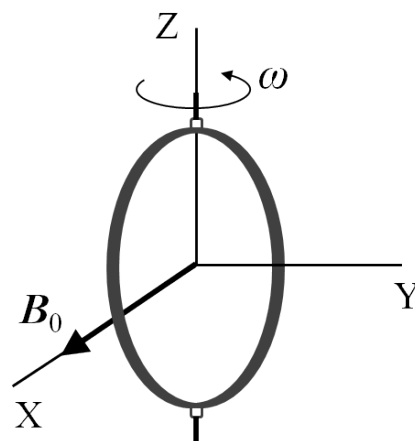
El módulo del campo magnético inducido en el centro de la bobina es

$$B_i(t) = \frac{\mu_0 N I(t)}{2a} = B_i \sin \omega t, \quad \text{con} \quad B_i = \frac{\mu_0 N I_0}{2a} = \frac{\mu_0 N \varepsilon_0}{2aR} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R}.$$

¹El valor medio $\langle X \rangle$ de una cantidad $X(t)$ en un sistema periódico de periodo T es $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$

Algunas integrales que puede necesitar:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$



Además, está alineado perpendicularmente al plano de la bobina, por tanto:

$\mathbf{B}_i(t) = B_i(t)(\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t)$; explícitamente:

$$B_{ix}(t) = B_i \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow \langle B_{ix} \rangle = B_i \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$$

$$B_{iy}(t) = B_i \sin \omega t \sin \omega t \Rightarrow \langle B_{iy} \rangle = B_i \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = B_i/2$$

El campo magnético total y su valor medio resultan ser

$$\mathbf{B}_T(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i(t) \Rightarrow \langle B_{Tx} \rangle = B_0 + \langle B_{ix} \rangle = B_0, \quad \langle B_{Ty} \rangle = \langle B_{iy} \rangle = B_i/2$$

Este sistema sirve para medir la resistencia de la bobina en función de la permeabilidad del aire μ_0 y los parámetros mecánicos y geométricos del sistema. Para ello, se coloca una pequeña aguja magnética en el centro de la bobina, como se muestra en la figura. Se la deja libre para girar en el plano horizontal alrededor del eje Z. Inicialmente intenta orientarse a lo largo del campo magnético total $\mathbf{B}(t)$ cuya variación es tan rápida que sólo alcanza a oscilar alrededor de su valor medio, hasta que se alcanza el régimen estacionario en que la aguja queda apuntando en una dirección fija que forma un ángulo θ con $\mathbf{B}_0$.

5. Indique la orientación final de la aguja y determine el ángulo θ . (0.5+0.5 pts)

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{Ty} \rangle}{\langle B_{Tx} \rangle} = \frac{B_i}{2B_0}, \text{ sustituyendo valores}$$

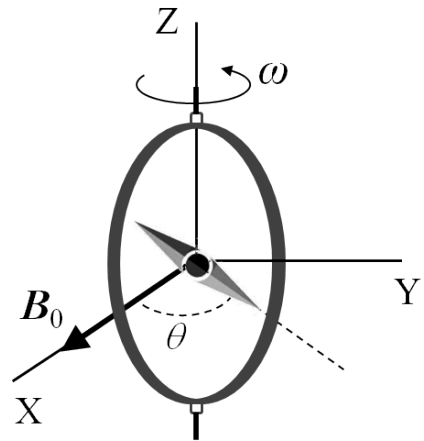
$$\tan \theta = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R}$$

6. Obtenga la resistencia R de la bobina en función de la permeabilidad magnética μ_0 y de los parámetros geométricos y mecánicos del sistema. (0.5 pts)

Despejando del resultado anterior,

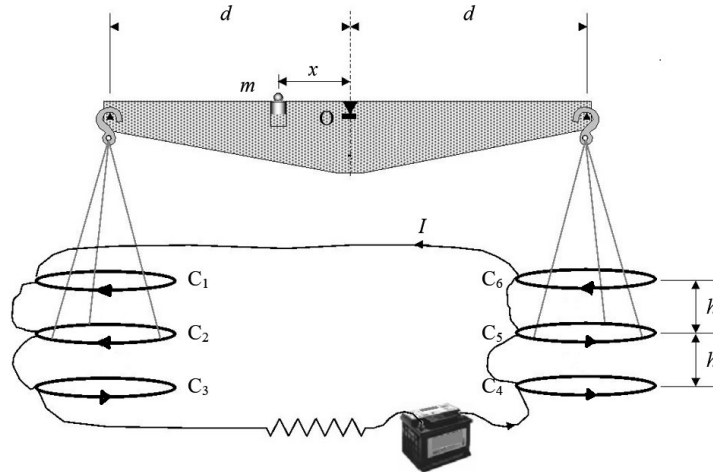
$$R = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4 \tan \theta}$$

que permite obtener la resistencia de la bobina en función de la permeabilidad magnética μ_0 y de los parámetros geométricos y mecánicos del sistema. Lord Kelvin usó este método en la década de 1860 para establecer el estándar absoluto para el ohmio.



Determinación de la intensidad de una corriente

Haciendo que pase una corriente a través de dos conductores y midiendo la fuerza entre ellos puede proporcionar una determinación absoluta de su intensidad. La “Balanza de corriente” explota este método. Consta de seis bobinas idénticas, $C_1 \dots C_6$, de una vuelta cada una y de radio a , conectadas en serie.



En la figura se ha omitido el mecanismo de sujeción de las bobinas C_1 , C_3 , y las C_4 , C_6 , que están fijas en dos planos horizontales separados por una pequeña distancia $2h$. Por el contrario, como muestra la figura, las bobinas móviles C_2 y C_5 están suspendidas de los brazos de la balanza, de longitud d , y en equilibrio quedan equidistantes de ambos planos horizontales. Las dimensiones del aparato son tales que se pueden despreciar los efectos mutuos entre las espiras de la izquierda y de la derecha.

Una corriente de intensidad I , que se quiere determinar, fluye a través de las diversas espiras en las direcciones indicadas en la figura. Para mantener la balanza en la posición de equilibrio descrita anteriormente cuando dicha corriente fluye a través del circuito se requiere una masa m colocada a una distancia x del fulcro O .

7. Calcule la fuerza F sobre C_2 debido a la interacción magnética con C_1 . Para ello, calcule^{††} la fuerza por unidad de longitud entre las dos espiras como si se tratase de dos hilos conductores largos y rectos que transportan corrientes paralelas. (0.5 pts)

La fuerza por unidad de longitud, f , entre dos alambres rectos paralelos indefinidos separados por una distancia h es $f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{h}$. Por tanto, para $I_1 = I = I_2$ y longitud $2\pi a$, la fuerza F inducida en C_2 por la bobina vecina C_1 será

$$F = \frac{\mu_0 a}{h} I^2.$$

8. La corriente I se mide cuando la balanza está en equilibrio. Obtenga su valor en función de μ_0 y los parámetros físicos del sistema. (1.5+0.5 pts)

En equilibrio $mgx = 4Fd$, es decir $mgx = \frac{4\mu_0 ad}{h} I^2$. Por lo tanto, $I = \left(\frac{mgxh}{4\mu_0 ad} \right)^{1/2}$;

función de nuevo de la permeabilidad magnética μ_0 y los parámetros geométricos y mecánicos del sistema.

^{††} Un cálculo detallado de la fuerza entre dos espiras circulares paralelas, que requiere integrales elípticas, indica que ésta es una buena aproximación cuando $h \ll a$ como en este caso.