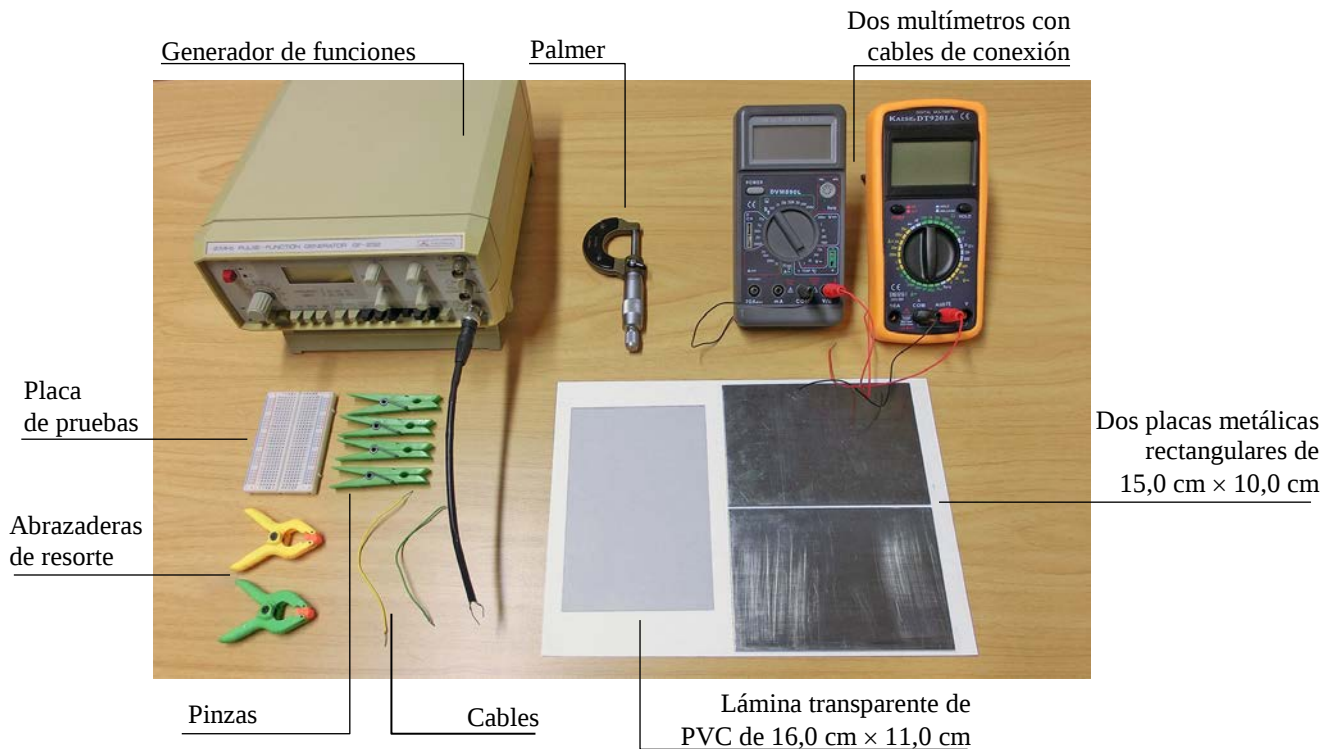


## P3. Permitividad relativa de una lámina de PVC

### OBJETIVO

Determinar el valor de la permitividad relativa de una lámina delgada de PVC.

### MATERIAL



### FUNDAMENTO

En los circuitos de corriente alterna, la oposición al paso de la corriente se mide mediante una magnitud denominada *impedancia*, cuya unidad en el Sistema Internacional es el ohmio. Cuando la tensión aplicada al circuito varía con el tiempo de forma senoidal, si llamamos  $Z$  al módulo de la impedancia éste puede escribirse como

$$Z = \frac{V}{I}, \quad (1)$$

donde  $V$  e  $I$  son, respectivamente, la tensión eficaz y la intensidad eficaz de la corriente alterna, es decir, los valores medios que se miden con un voltímetro y un amperímetro. De este modo, se generaliza la ley de Ohm a circuitos de corriente alterna.

Un componente pasivo como un resistor, presenta una resistencia eléctrica,  $R$ , que es igual cuando se encuentra en un circuito de corriente continua o de corriente alterna. Sin embargo, componentes como bobinas y condensadores muestran un comportamiento diferente. Cuando un condensador se encuentra en un circuito de corriente continua, sus placas se cargan y la corriente se interrumpe, por lo que el sistema se comporta como un circuito abierto. Sin embargo, cuando el condensador está en un circuito de corriente alterna, la carga entra y sale periódicamente de sus placas y hay conducción a través de dicho circuito. La oposición al paso de la corriente que muestra el condensador en un circuito de corriente alterna se denomina *reactancia capacitiva*,  $\chi_C$ .

Si se considera un circuito que solo contiene un condensador ideal (es decir, aquel que no tiene resistencia), el módulo de la impedancia es

$$Z = \chi_C \quad (2)$$

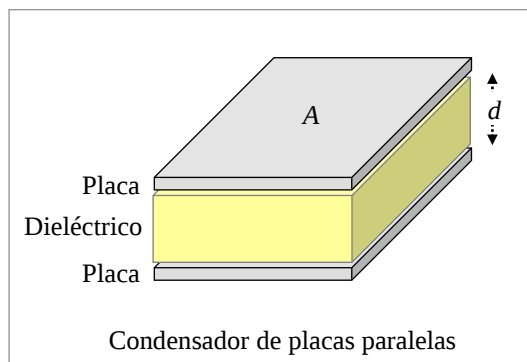
En este problema consideraremos el caso de un condensador ideal.

La reactancia capacitiva es inversamente proporcional a la capacidad,  $C$  y a la frecuencia,  $\nu$ , de la corriente alterna, de modo que:

$$\chi_C = \frac{1}{2\pi \cdot \nu \cdot C} \quad (3)$$

Por otra parte, en un condensador constituido por dos placas metálicas paralelas separadas por un material dieléctrico, la capacidad,  $C$ , es directamente proporcional al área de las placas,  $A$ , inversamente proporcional a su separación,  $d$ , y además depende de la naturaleza del dieléctrico interpuesto, caracterizada por su *permitividad*,  $\varepsilon$ . Así:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \quad (4)$$



La permitividad puede expresarse como el producto de la *permitividad del vacío*,  $\varepsilon_0$ , por la permitividad de la sustancia respecto al vacío, que es un valor adimensional llamado *permitividad relativa*,  $\varepsilon_r$ . Es decir:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (5)$$

Con las expresiones (4) y (5) se obtiene:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (6)$$

El objetivo del problema es determinar el valor de la permitividad relativa,  $\varepsilon_r$ , de una lámina de PVC.

## MONTAJE

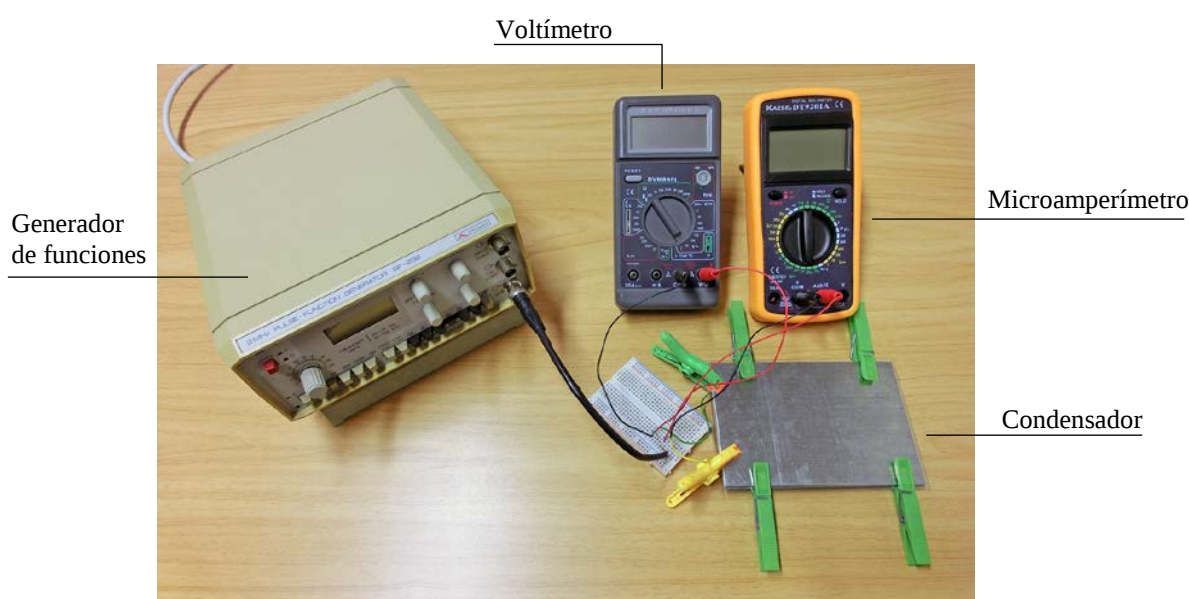
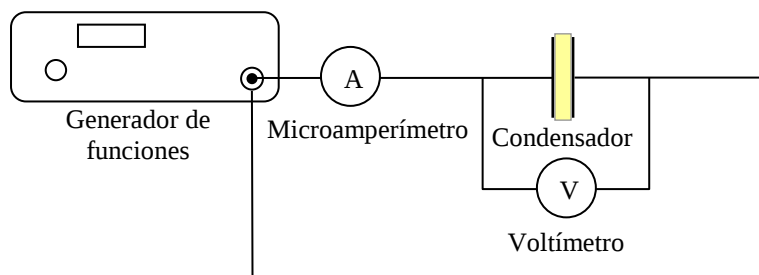
### Condensador



Se interpone la lámina de PVC entre las dos placas metálicas, que han de estar enfrentadas cuidadosamente. El conjunto formado se mantiene unido con ayuda de cuatro pinzas. El contacto eléctrico de cada placa se realiza con un cable fijado por presión a la correspondiente placa por medio de una abrazadera de resorte.

## Circuito

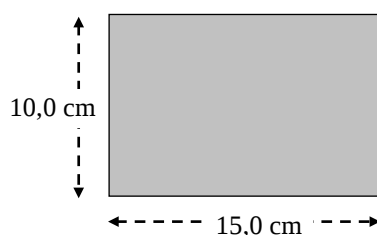
El circuito eléctrico se monta de acuerdo con el esquema.



## PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

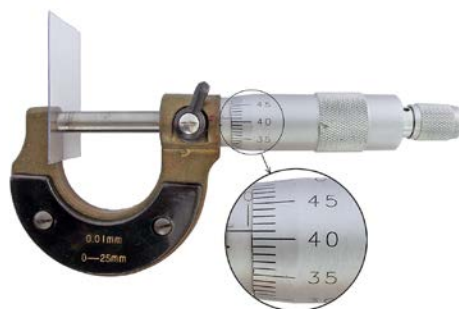
El generador de funciones es una fuente de tensión alterna que puede producir corrientes alternas con diferentes formas de onda y en diferentes rangos, que pueden elegirse mediante un selector de bandas. En nuestro caso se ha elegido el comprendido entre 200 Hz y 2 KHz, con *onda senoidal*. Por otra parte, los multímetros trabajan en corriente alterna en un rango comprendido entre 40 Hz y 400 Hz. Por esta circunstancia, todas las medidas del experimento se han hecho entre 200 Hz y 400 Hz.

1) Las dimensiones de las placas metálicas rectangulares son las que muestran en la figura:



Escriba el área de la placa,  $A$  y la incertidumbre de este valor,  $\Delta A$ . (0,5 puntos)

2) El espesor de la lámina de PVC se mide con un *palmer* tomando un fragmento del mismo material. El palmer es un instrumento que aprecia centésimas de milímetro. En la figura siguiente puede leerse el valor del espesor,  $d$ , de la lámina.



Escriba el espesor de la lámina,  $d$  y la incertidumbre de este valor,  $\Delta d$ . **(0,5 puntos)**

3) Combine las expresiones (2), (3) y (6), y obtenga una dependencia lineal entre  $Z$  y una función de  $\nu$ . Indique la expresión de la pendiente,  $p$ , de esa recta. **(1,0 puntos)**

4) Con el circuito montado, se va girando el botón del control de frecuencia del generador. Para cada valor elegido de frecuencia se anota la indicación del voltímetro y del microamperímetro. Los resultados obtenidos se muestran en el APÉNDICE.

Traslade los valores que aparecen en el APÉNDICE a una tabla como la siguiente.

|     | $\nu$ (Hz) | $V$ (V) | $I$ (A) | $Z$ ( $\Omega$ ) |  |
|-----|------------|---------|---------|------------------|--|
| 1   |            |         |         |                  |  |
| 2   |            |         |         |                  |  |
| 3   |            |         |         |                  |  |
| ... |            |         |         |                  |  |

En la cuarta columna se anotan los valores del módulo de la impedancia,  $Z$ , de acuerdo con la expresión (1). La columna vacía se rellenará más adelante. **(1,5 puntos)**

5) Calcule los valores de la función de  $\nu$  que obtuvo en el apartado 3) y trasládelos a la quinta columna de la tabla anterior. **(0,5 puntos)**

6) Represente gráficamente los puntos correspondientes a la dependencia entre  $Z$  y la función de  $\nu$ , situando esta última en el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

7) Determine el valor de la pendiente,  $p$ , de la recta que mejor se ajusta a esos puntos y su incertidumbre,  $\Delta p$ . **(1,0 + 1,5 = 2,5 puntos)**

8) A partir del ajuste anterior, conocidos el área de las placas, el espesor de la lámina de PVC y el valor de la permitividad del vacío, que es  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ , determine el valor de la permitividad relativa,  $\epsilon_r$ . En cuanto a la posible simplificación de las unidades que aparecen en el cálculo, tenga en cuenta las siguientes relaciones:

voltio = amperio  $\times$  ohmio; culombio = amperio  $\times$  segundo; culombio = faradio  $\times$  voltio

**(1,0 puntos)**

9) Conocidas las incertidumbres del área de las placas,  $\Delta A$ , del espesor de la lámina de PVC,  $\Delta d$ , de la pendiente,  $\Delta p$ , y sabiendo que el valor de  $\epsilon_0$  está libre de error, determine la incertidumbre de la permitividad relativa,  $\Delta \epsilon_r$ . **(1,0 puntos)**

## APÉNDICE

| Medida | $\nu$ (Hz)                                                                          | V (V)                                                                               | $I$ ( $\mu$ A)                                                                       |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      |    |    |    |
| 2      |    |    |    |
| 3      |    |    |    |
| 4      |    |    |    |
| 5      |    |    |    |
| 6      |   |   |   |
| 7      |  |  |  |
| 8      |  |  |  |
| 9      |  |  |  |
| 10     |  |  |  |
| 11     |  |  |  |
| 12     |  |  |  |

**HOJA 1. Apartados 1, 2 y 3**

- **(Apartado 1)** Cálculo del área de la placa metálica,  $A$ , y de su incertidumbre,  $\Delta A$ .
- **(Apartado 2)** Valor del espesor de la lámina de PVC,  $d$ , y de su incertidumbre  $\Delta d$ .
- **(Apartado 3)** Deducción de la dependencia lineal entre  $Z$  y una función de  $\nu$ , y expresión de la pendiente,  $p$ .

**HOJA 2. Apartados 4 y 5**

- **(Apartados 4 y 5)** Tabla.

|     | $\nu$ (Hz) | $V$ (V) | $I$ (A) | $Z$ ( $\Omega$ ) | Función de $\nu$ |
|-----|------------|---------|---------|------------------|------------------|
| 1   |            |         |         |                  |                  |
| 2   |            |         |         |                  |                  |
| 3   |            |         |         |                  |                  |
| ... |            |         |         |                  |                  |

**HOJA 3. Apartado 6 y primera parte del apartado 7**

- **(Apartado 6)** Papel milimetrado que recoja la representación gráfica.
- **(Apartado 7, primera parte)** Sobre la gráfica anterior, las líneas necesarias para el cálculo de la incertidumbre de la pendiente.

**HOJA 4. Segunda parte del apartado 7 y apartados 8 y 9**

- **(Apartado 7, segunda parte)** Cálculo de la pendiente de la recta,  $p$ , y de su incertidumbre  $\Delta p$ .
- **(Apartado 8)** Cálculo de la permitividad relativa,  $\epsilon_r$ .
- **(Apartado 9)** Cálculo de la incertidumbre de la permitividad relativa,  $\Delta \epsilon_r$ .

### P3. SOLUCIÓN

1)  $A = 15,0 \text{ cm} \times 10,0 \text{ cm} = 150,0 \text{ cm}^2$

$$\Delta A = A \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} = 150,0 \sqrt{\left(\frac{0,05}{15,0}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{10,0}\right)^2} = 0,9 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área} = (150,0 \pm 0,9) \text{ cm}^2$$

2)  $d = 41,0 \times 10^{-2} \text{ mm}$

$$\Delta d = 0,5 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\text{Espesor} = (41,0 \pm 0,5) \times 10^{-2} \text{ mm}$$

3) Se parte de las siguientes expresiones:

$$Z = \chi_C \quad (2)$$

$$\chi_C = \frac{1}{2\pi \cdot \nu \cdot C} \quad (3)$$

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3) y el resultado en (2), se tiene:

$$Z = \frac{d}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 A} \frac{1}{\nu} \quad (7)$$

Si se representa gráficamente  $Z$  frente a  $1/\nu$  se obtendrá una recta que ha pasar por el origen de coordenadas, y en la cual:

$$\text{Pendiente : } p = \frac{d}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 A}$$

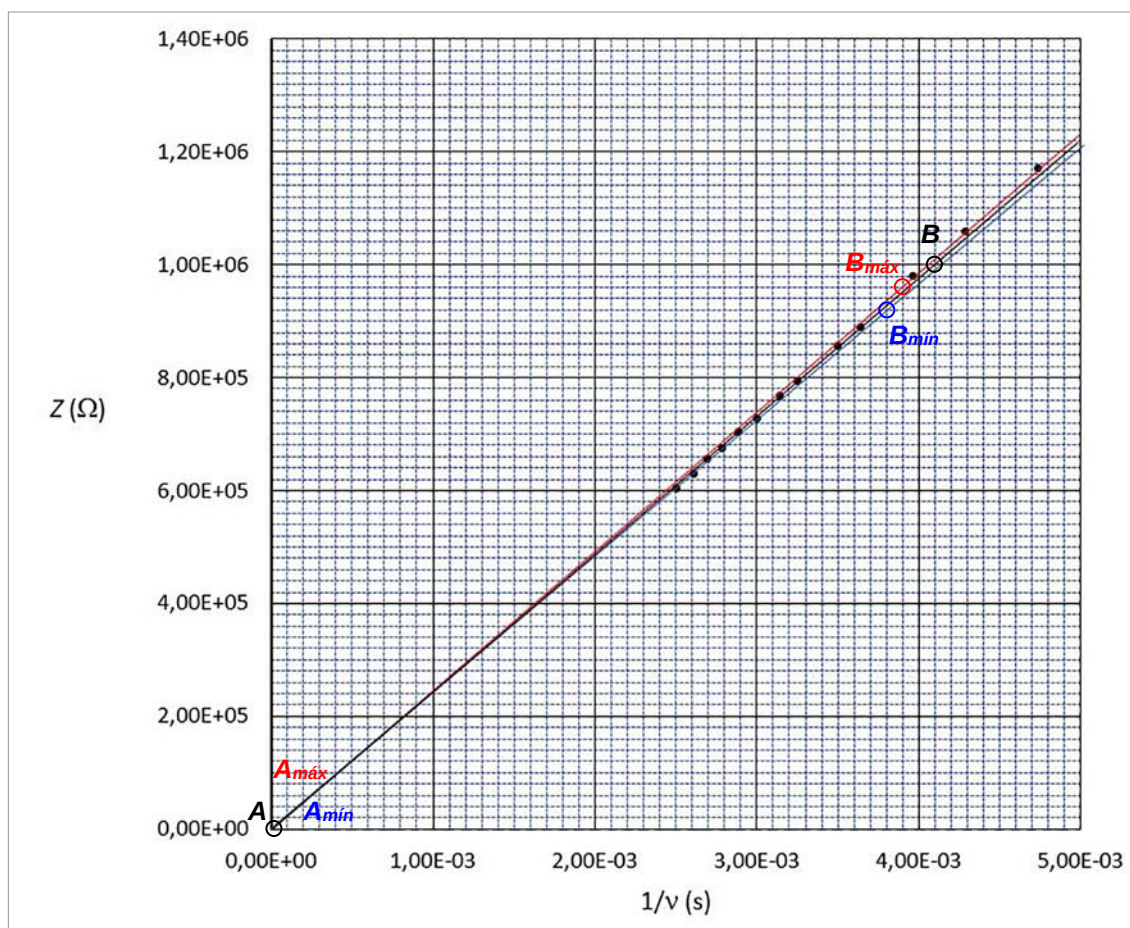
4)

|    | $\nu$ (Hz) | $V$ (V) | $I$ (A)               | $Z = V/I$ ( $\Omega$ ) |  |
|----|------------|---------|-----------------------|------------------------|--|
| 1  | 233        | 6,78    | $6,4 \times 10^{-6}$  | $10,6 \times 10^5$     |  |
| 2  | 252        | 6,77    | $6,9 \times 10^{-6}$  | $9,81 \times 10^5$     |  |
| 3  | 275        | 6,77    | $7,6 \times 10^{-6}$  | $8,91 \times 10^5$     |  |
| 4  | 286        | 6,77    | $7,9 \times 10^{-6}$  | $8,57 \times 10^5$     |  |
| 5  | 308        | 6,76    | $8,5 \times 10^{-6}$  | $7,95 \times 10^5$     |  |
| 6  | 318        | 6,76    | $8,8 \times 10^{-6}$  | $7,68 \times 10^5$     |  |
| 7  | 333        | 6,76    | $9,3 \times 10^{-6}$  | $7,27 \times 10^5$     |  |
| 8  | 347        | 6,76    | $9,6 \times 10^{-6}$  | $7,04 \times 10^5$     |  |
| 9  | 359        | 6,75    | $10,0 \times 10^{-6}$ | $6,75 \times 10^5$     |  |
| 10 | 371        | 6,75    | $10,3 \times 10^{-6}$ | $6,55 \times 10^5$     |  |
| 11 | 383        | 6,75    | $10,7 \times 10^{-6}$ | $6,31 \times 10^5$     |  |
| 12 | 400        | 6,75    | $11,2 \times 10^{-6}$ | $6,03 \times 10^5$     |  |

5) Se completa la tabla del apartado 4)

|    | $\nu$ (Hz) | $V$ (V) | $I$ (A)               | $Z = V/I$ ( $\Omega$ ) | $1/\nu$ (s)           |
|----|------------|---------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| 1  | 233        | 6,78    | $6,4 \times 10^{-6}$  | $10,6 \times 10^5$     | $4,29 \times 10^{-3}$ |
| 2  | 252        | 6,77    | $6,9 \times 10^{-6}$  | $9,81 \times 10^5$     | $3,97 \times 10^{-3}$ |
| 3  | 275        | 6,77    | $7,6 \times 10^{-6}$  | $8,91 \times 10^5$     | $3,64 \times 10^{-3}$ |
| 4  | 286        | 6,77    | $7,9 \times 10^{-6}$  | $8,57 \times 10^5$     | $3,50 \times 10^{-3}$ |
| 5  | 308        | 6,76    | $8,5 \times 10^{-6}$  | $7,95 \times 10^5$     | $3,25 \times 10^{-3}$ |
| 6  | 318        | 6,76    | $8,8 \times 10^{-6}$  | $7,68 \times 10^5$     | $3,14 \times 10^{-3}$ |
| 7  | 333        | 6,76    | $9,3 \times 10^{-6}$  | $7,27 \times 10^5$     | $3,00 \times 10^{-3}$ |
| 8  | 347        | 6,76    | $9,6 \times 10^{-6}$  | $7,04 \times 10^5$     | $2,88 \times 10^{-3}$ |
| 9  | 359        | 6,75    | $10,0 \times 10^{-6}$ | $6,75 \times 10^5$     | $2,79 \times 10^{-3}$ |
| 10 | 371        | 6,75    | $10,3 \times 10^{-6}$ | $6,55 \times 10^5$     | $2,70 \times 10^{-3}$ |
| 11 | 383        | 6,75    | $10,7 \times 10^{-6}$ | $6,31 \times 10^5$     | $2,61 \times 10^{-3}$ |
| 12 | 400        | 6,75    | $11,2 \times 10^{-6}$ | $6,03 \times 10^5$     | $2,50 \times 10^{-3}$ |

6) y 7)



Una vez trazada la recta que mejor se ajusta a los puntos de la gráfica se toman dos puntos de la misma, A y B, suficientemente separados y, a partir de ellos, se calcula la pendiente,  $p$ .

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1,00 \times 10^6 - 0 \text{ } \Omega}{4,10 \times 10^{-3} - 0 \text{ s}}$$

$$p = 2,44 \times 10^8 \Omega \cdot s^{-1}$$

La incertidumbre de la pendiente puede obtenerse trazando las rectas de máxima y mínima pendiente respecto a la recta de ajuste.

$$p_{m\acute{a}x} = \frac{y_{Bm\acute{a}x} - y_{Am\acute{a}x}}{x_{Bm\acute{a}x} - x_{Am\acute{a}x}} = \frac{9,60 \times 10^5 - 0 \text{ } \Omega}{3,90 \times 10^{-3} - 0 \text{ s}}$$

$$p_{m\acute{a}x} = 2,46 \times 10^8 \Omega \cdot s^{-1}$$

$$p_{m\acute{i}n} = \frac{y_{Bm\acute{i}n} - y_{Am\acute{i}n}}{x_{Bm\acute{i}n} - x_{Am\acute{i}n}} = \frac{9,20 \times 10^5 - 0 \text{ } \Omega}{3,80 \times 10^{-3} - 0 \text{ s}}$$

$$p_{m\acute{i}n} = 2,42 \times 10^8 \Omega \cdot s^{-1}$$

$$\Delta p = \frac{p_{m\acute{a}x} - p_{m\acute{i}n}}{2} = \frac{2,46 \times 10^8 - 2,42 \times 10^8}{2} \Omega \cdot s^{-1}$$

$$\Delta p = 0,02 \times 10^8 \Omega \cdot s^{-1}$$

$$\text{Pendiente, } p = (2,44 \pm 0,02) \times 10^8 \Omega \cdot s^{-1}$$

8) Como la pendiente de la recta es:

$$p = \frac{d}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 A}$$

Entonces:

$$\epsilon_r = \frac{d}{2\pi\epsilon_0 A p}$$

$$\epsilon_r = \frac{0,41 \times 10^{-3}}{2\pi \times 8,854 \times 10^{-12} \times 150 \times 10^{-4} \times 2,44 \times 10^8 \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{m}^2 \cdot \Omega \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\epsilon_r = 2,01$$

9)

$$\Delta\epsilon_r = \epsilon_r \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2}$$

$$\Delta\epsilon_r = 2,01 \times \sqrt{\left(\frac{0,005}{0,410}\right)^2 + \left(\frac{0,9}{150,0}\right)^2 + \left(\frac{0,02}{2,44}\right)^2}$$

$$\Delta\epsilon_r = 0,03$$

Por tanto, permitividad relativa,  $\epsilon_r = 2,01 \pm 0,03$