P3. Coeficiente de viscosidad de la glicerina

OBJETIVO

Determinar el coeficiente de viscosidad de la glicerina.

FUNDAMENTO TEÓRICO

La viscosidad es la oposición que muestra un fluido al flujo, lo que provoca resistencia al deslizamiento entre distintas capas del fluido, así como fricción sobre los cuerpos que se mueven a través de él. Si se considera que un fluido está constituido por capas (figura 1), la fuerza, F, que es necesario realizar sobre una capa de área A para deslizarla con velocidad Δv sobre otra capa separada de la primera una distancia Δy, es proporcional al gradiente de velocidad:

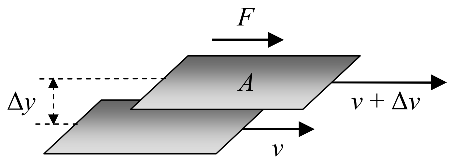


Fig. 1

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y} \qquad (1)$$

donde η se denomina *coeficiente de viscosidad*. La unidad del coeficiente de viscosidad es el pascal segundo (Pa s) que, en términos de unidades fundamentales, equivale a kg $m^{-1}s^{-1}$.

El objetivo del problema es determinar el coeficiente de viscosidad de la glicerina.

Para ello, se deja caer una esfera de acero en un recipiente que contiene ese líquido. Durante la caída de la esfera (figura 2), para velocidades bajas, como es el caso de este experimento, la esfera se ve sometida a tres fuerzas: su peso, P, el empuje del líquido, E, y la fricción experimentada por la esfera, F, debida a la viscosidad. La velocidad de caída aumenta hasta adquirir un valor constante, que se denomina *velocidad límite*, v_l. Determinado el valor de la velocidad límite y conocidos los valores del radio, r, de la esfera (o su diámetro, d), la aceleración de la gravedad, g, la densidad de la esfera, ρ_E y la densidad del líquido, ρ_L, el coeficiente de viscosidad viene dado por:

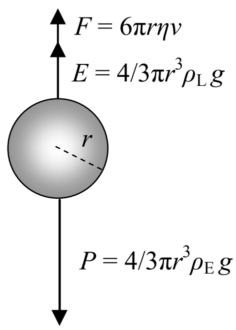


Fig. 2

$$\eta = \frac{d^2 g(\rho_E - \rho_L)}{18 v_l} \qquad (2)$$

La velocidad límite, v_l, de la expresión anterior corresponde a una esfera que cae en el seno de un fluido de extensión infinita. Sin embargo, cuando la caída tiene lugar en el interior de un tubo de diámetro D, la velocidad límite ya no es v_l, sino v_m, menor que la anterior debido a la resistencia adicional que surge en las paredes del tubo. Ambas velocidades están relacionadas según la siguiente expresión:

$$v_l = \left(1 + 2{,}4\frac{d}{D}\right) v_m \qquad (3)$$

MATERIAL

Vaso con glicerina
Esfera de acero
Calibre
Balanza
Regla
Electroimán con batería e interruptor
Cámara fotográfica

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

1) Se mide con el calibre el diámetro de la esfera, como se muestra en la figura 3. Anote el valor del diámetro, d, indicando la incertidumbre de la medida, debida al instrumento, Δd. ***(0,5 puntos)***

Fig. 3

2) Se mide con la balanza la masa de la esfera. Para evitar que la esfera se mueva, se pone primeramente un pequeño anillo de plástico. Pulsando la tecla "tara", se pone a cero la balanza (figura 4, A); después se pone la esfera sobre el anillo y se lee el valor de la masa de aquella en la pantalla (figura 4, B). Anote el valor de esta masa, m, indicando la incertidumbre de la medida, debida al instrumento, Δm. ***(0,5 puntos)***

A

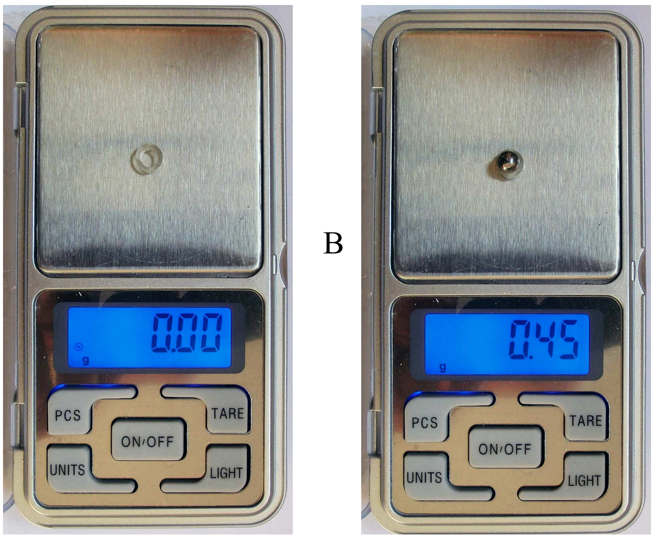


Fig. 4

3) Conocido el diámetro y la masa de la esfera, determine su densidad, ρ_E junto con la incertidumbre, $\Delta\rho_E$. ***(0,5 + 1,0 = 1,5 puntos)***

4) Se llena un vaso con glicerina hasta casi un centímetro del borde, y cerca de la pared del vaso se pone una regla. A muy poca distancia de la superficie de la glicerina se encuentra, conectado a una batería, un electroimán que atrae la esfera. Al desconectar el electroimán se suelta la esfera, que cae dentro de la glicerina con movimiento uniforme casi desde el principio. Con una cámara, situada a suficiente distancia con el fin de hacer despreciable el error de paralaje, se graba un vídeo y las imágenes extraídas del mismo, a intervalos de 0,20 s, se agrupan en una secuencia fotográfica. La regla situada a la izquierda de la fotografía se toma como referencia para superponer una escala de medida. Esta escala, que es la representada en el interior del vaso, permite determinar la posición de la esfera. La composición de la fotografía y la escala se muestra en la figura 5 (la forma elíptica que presenta la esfera en cada posición se debe a la refracción de la luz en la glicerina del vaso).

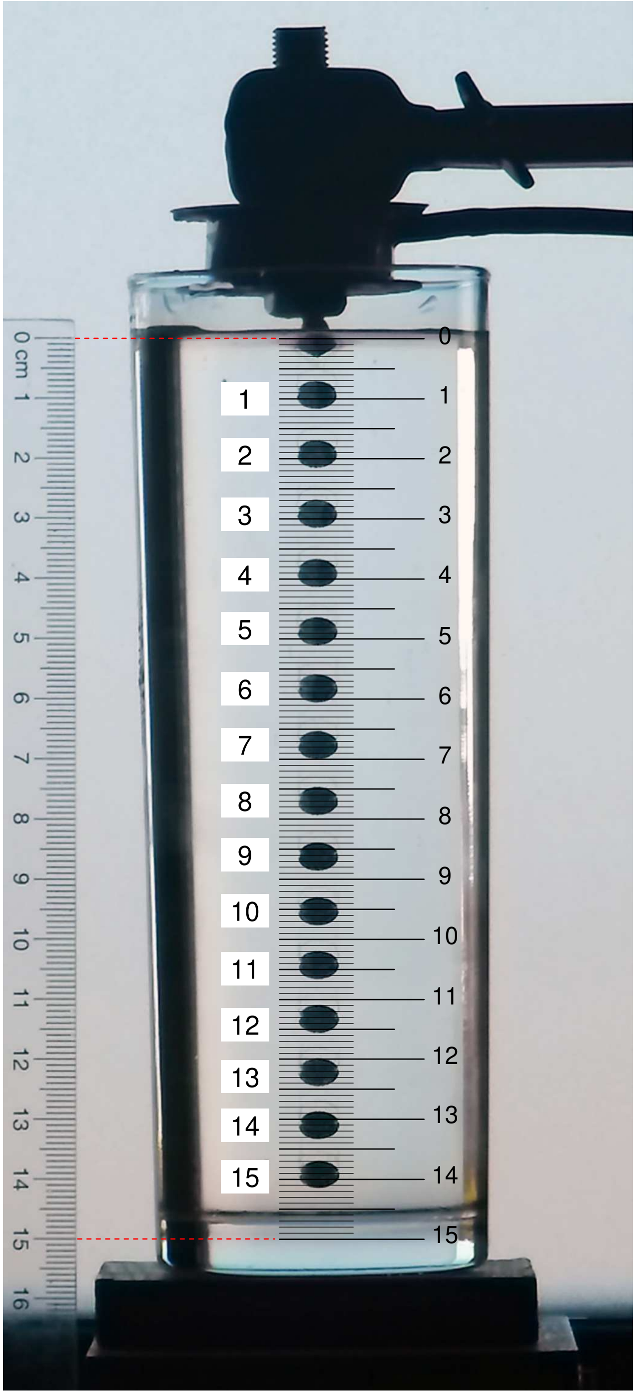


Fig. 5

Elabore una tabla de valores y realice una representación gráfica de la que pueda obtenerse la velocidad límite, v_m. Determine el valor de esta velocidad. ***(1,5 + 1,0 + 1,0 = 3,5 puntos)***

5) Utilizando la expresión (3) obtenga la velocidad límite, v_l. Teniendo en cuenta que el recipiente en el que se ha realizado el experimento no es cilíndrico, sino troncocónico, con un diámetro de 5,5 cm en la parte superior y 4,5 cm en la parte inferior, se admitirá que $D \pm \Delta D = (5{,}0 \pm 0{,}5)$ cm. ***(0,5 puntos)***

6) Obtenga la incertidumbre de la velocidad límite, Δv_l, admitiendo que las incertidumbres Δd y Δv_m son despreciables frente a la incertidumbre ΔD. ***(1,0 puntos)***

7) Sabiendo que la aceleración de la gravedad en el lugar del experimento es g = 9,80 m s^{-2}, que la temperatura ambiente es de 20 ºC y que la densidad de la glicerina a esa temperatura es ρ_L = 1264 kg m^{-3}, obtenga el valor del coeficiente de viscosidad de la glicerina, η, a partir de la expresión (2). ***(0,5 puntos)***

8) Obtenga el valor de la incertidumbre $\Delta\eta$, considerando que las únicas incertidumbres significativas son $\Delta\rho_E$ y Δv_l. ***(2,0 puntos)***

P3. SOLUCIÓN

1) $d \pm \Delta d = (4{,}78 \pm 0{,}01)$ mm $= (4{,}78 \pm 0{,}01) \times 10^{-3}$ m

2) $m \pm \Delta m = (0{,}45 \pm 0{,}01)$ g $= (4{,}5 \pm 0{,}1) \times 10^{-4}$ kg

3) $$\rho_{\mathrm{E}} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3} = \frac{6m}{\pi d^3} = \frac{6\times 0{,}45}{\pi\times 0{,}478^3}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 7{,}9\ \mathrm{g\,cm^{-3}} = 7{,}9\times 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$$

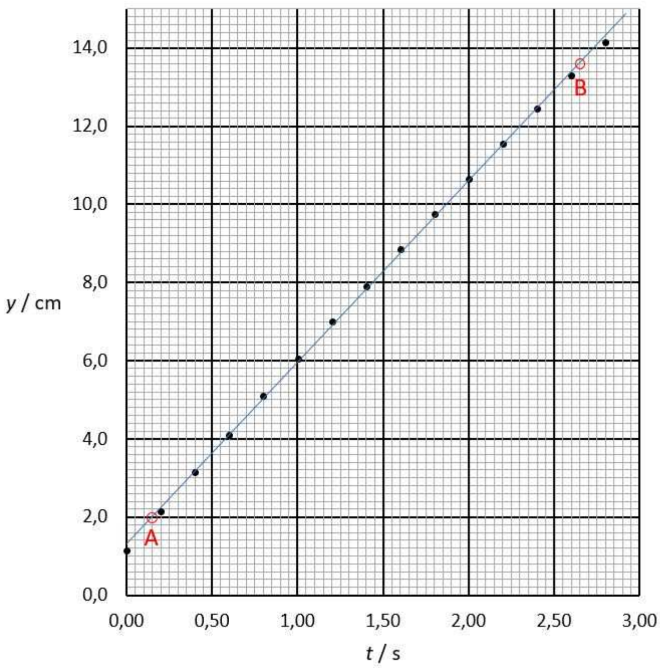
Considerando las incertidumbres Δm y Δd, se tiene:

$$\Delta\rho_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{E}}\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(3\frac{\Delta d}{d}\right)^3} = 7{,}9\ \mathrm{g\,cm^{-3}}\sqrt{\left(\frac{0{,}01\ \mathrm{g}}{0{,}45\ \mathrm{g}}\right)^2 + \left(3\times\frac{0{,}001\ \mathrm{cm}}{0{,}478\ \mathrm{cm}}\right)^2} = 0{,}18\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$$

$$\rho_{\mathrm{E}} \pm \Delta\rho_{\mathrm{E}} = (7{,}9 \pm 0{,}2)\ \mathrm{g\,cm^{-3}} = (7{,}9 \pm 0{,}2)\times 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$$

4)

	t / s	y / cm
1	0,00	1,15
2	0,20	2,15
3	0,40	3,15
4	0,60	4,10
5	0,80	5,10
6	1,00	6,05
7	1,20	7,00
8	1,40	7,90
9	1,60	8,85
10	1,80	9,75
11	2,00	10,65
12	2,20	11,55
13	2,40	12,45
14	2,60	13,30
15	2,80	14,15



Para determinar v_{m} se toman dos puntos de la gráfica, A y B, suficientemente separados.

$$\text{Pendiente} = v_{\mathrm{m}} = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{B}} - t_A} = \frac{13{,}6 - 2{,}0}{2{,}65 - 0{,}15}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4{,}64\ \mathrm{cm\,s^{-1}} = 4{,}64\times 10^{-2}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Con Excel se obtiene: $v_{\mathrm{m}} \pm \Delta v_{\mathrm{m}} = (4{,}64 \pm 0{,}03)\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$ ($R^2 = 0{,}9995$)

5) $$v_1 = \left(1 + 2{,}4\frac{d}{D}\right)v_{\mathrm{m}} = \left(1 + 2{,}4\frac{0{,}478\ \mathrm{cm}}{5{,}0\ \mathrm{cm}}\right)\times 4{,}64\ \mathrm{cm\,s^{-1}} = 5{,}7\ \mathrm{cm\,s^{-1}} = 5{,}7\times 10^{-2}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

6) Considerando despreciables las incertidumbres Δd y Δv_m frente a la incertidumbre ΔD, se tiene:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial v_1}{\partial D}\Delta D\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2{,}4 v_m d\Delta D}{D^2}\right)^2} = \frac{2{,}4\times 4{,}64\times 0{,}478\times 0{,}5}{5{,}0^2}\ \text{cm s}^{-1} = 0{,}1\ \text{cm s}^{-1}$$

$$v_1 \pm \Delta v_1 = (5{,}7\pm 0{,}1)\ \text{cm s}^{-1} = (5{,}7\pm 0{,}1)\times 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}$$

7)

$$\eta = \frac{d^2 g(\rho_E - \rho_L)}{18 v_1}$$

$$\eta = \frac{(0{,}478\times 10^{-2})^2\times 9{,}80\times(7{,}9\times 10^3 - 1{,}264\times 10^3)}{18\times 5{,}7\times 10^{-2}}\frac{\text{m}^2\text{m s}^{-2}\ \text{kg m}^{-3}}{\text{m s}^{-1}} = 1{,}4\ \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$$

8)

$$\eta = \frac{d^2 g(\rho_E - \rho_L)}{18 v_1}$$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho_E}\Delta\rho_E\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v_1}\Delta v_1\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{d^2 g}{18 v_1}\Delta\rho_E\right]^2 + \left[\frac{d^2 g(\rho_E-\rho_L)}{18 v_1^2}\Delta v_1\right]^2}$$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left[\frac{(0{,}478\times 10^{-2})^2\times 9{,}80}{18\times 5{,}7\times 10^{-2}}\times 0{,}2\times 10^{-2}\right]^2 + \left[\frac{(0{,}478\times 10^{-2})^2\times 9{,}80\times(7{,}9\times 10^3 - 1{,}264\times 10^3)}{18\times(5{,}7\times 10^{-2})^2}\times 0{,}1\times 10^{-2}\right]^2}\ \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$$

$$\Delta\eta = \sqrt{1{,}905\times 10^{-3} + 6{,}456\times 10^{-4}}\ \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1} = 0{,}05\ \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$$

$$\eta \pm \Delta\eta = (1{,}4\pm 0{,}1)\ \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$$