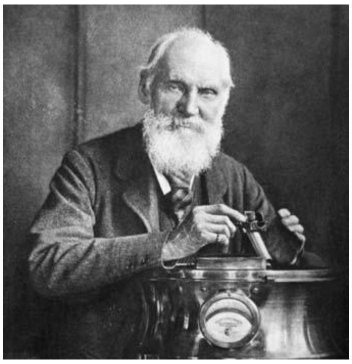
P3.- Lord Kelvin, un surtido de física



William Thomson, Lord Kelvin (1824 - 1907), fue un físico e inventor británico que contribuyó decisivamente a modernizar la física en el siglo XIX. Destacó en el campo de la termodinámica, donde ayudó a entender la conservación de la energía y la equivalencia entre calor y trabajo, estableció la escala absoluta de temperatura (escala Kelvin), calculó el cero absoluto, y formuló la segunda ley de la termodinámica. También sobresalió en electromagnetismo, al fundar la termoelectricidad y realizar diseños e inventos que permitieron desarrollar la telegrafía.

Luminosidad, edad y temperatura del Sol

Un gran reto científico del siglo XIX fue explicar el brillo de las estrellas y estimar su edad. Kelvin estudió la luminosidad y la edad del Sol. En astronomía, se llama *luminosidad* a la potencia emitida en todas direcciones por un cuerpo celeste.

En los siguientes apartados tenga en cuenta estos datos para el Sol: luminosidad $L_\odot = 3{,}85\times10^{26}\ \mathrm{W}$, radio $R_\odot = 6{,}96\times10^{8}\ \mathrm{m}$, masa $M_\odot = 1{,}99\times10^{30}\ \mathrm{kg}$, $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Para explicar la luminosidad solar, Kelvin consideró primero la hipótesis del "bombardeo de meteoritos". Supuso que la energía que emite el Sol proviene de la energía cinética de una supuesta lluvia de meteoritos que impactarían regularmente contra él a una velocidad igual a la velocidad de escape del Sol.

a) Obtenga una expresión (en función de $L_\odot$, $R_\odot$, $M_\odot$ y G) para la masa de meteoritos que debería llegar al Sol por unidad de tiempo para mantener su luminosidad. Calcule la masa total en 1 año.

Tras descartar la hipótesis anterior Kelvin desarrolló, junto a Hermann von Helmholtz, la teoría que en astrofísica se conoce como "contracción de Kelvin-Helmholtz", según la cual la fuente de energía de las estrellas es su autoenergía gravitatoria. Se llama *autoenergía gravitatoria* de un cuerpo a la energía de los campos gravitatorios generados por las propias masas que componen dicho cuerpo[1].

b) Demuestre que la autoenergía gravitatoria de una esfera homogénea de masa M y radio R es $U = -\dfrac{3}{5}\dfrac{GM^2}{R}$. Calcule el valor de la autoenergía gravitatoria del Sol, $U_\odot$.

(Ayuda: Tome una cáscara esférica de radio r y espesor dr, y calcule la energía potencial dU de dicha cáscara en el campo gravitatorio que crea la masa esférica interior. Integre[2] de $r = 0$ a $r = R$).

Según el mecanismo de Kelvin-Helmholtz, el Sol se contrajo hasta su estado actual partiendo de una nube inicial con sus partes infinitamente separadas y en reposo (temperatura en el cero absoluto). En una contracción gravitacional se cumple que la mitad de la autoenergía potencial perdida (entre el estado inicial y el actual) se convierte en radiación y la otra mitad en calor (aumentando la temperatura del cuerpo).

c) Calcule, a partir de $U_\odot$ y de $L_\odot$, la edad del Sol que estimó Kelvin. Exprese su resultado en millones de años.

---

[1] Es equivalente al trabajo necesario para formar el cuerpo a partir de sus partes, inicialmente separadas entre sí una distancia infinita.

[2] $\int r^n dr = \dfrac{r^{n+1}}{(n+1)}$, para $n \neq -1$.

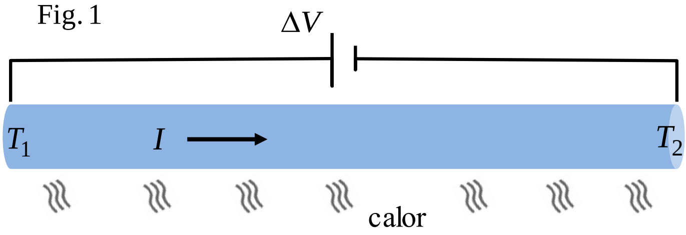
d) Calcule la temperatura $T_\odot$ del Sol que estimó Kelvin sabiendo que tomó para el calor específico del Sol un valor igual a 10 veces el del agua. Dato: c_{agua} = 4,187 J/(g K).

Termoelectricidad: efectos Joule y Thomson

Kelvin sentó las bases de la termoelectricidad al explicar distintos fenómenos de producción de electricidad a partir de calor y viceversa (efectos Seebeck y Peltier). Descubrió además el efecto Thomson (que lleva su apellido), el cual consiste en lo siguiente (figura 1):

Si circula una corriente eléctrica por un conductor homogéneo cuyos extremos se mantienen a temperaturas distintas, se produce absorción o liberación de calor a lo largo del conductor, que se suma a la liberación de calor por efecto Joule.

Fig. 1



Si consideramos un cable (de conductividad térmica despreciable) homogéneo y cilíndrico de longitud L y sección A, la potencia calorífica (emitida o absorbida) por unidad de volumen $\mathcal{V}$ es

$$\frac{P}{\mathcal{V}} = \underbrace{\rho J^2}_{\text{Joule}} - \underbrace{\tau \frac{J}{L} \Delta T}_{\text{Thomson}} \qquad (1)$$

donde ρ es la resistividad[3] del material, J es la intensidad de corriente por unidad de área, ΔT es la diferencia de temperatura entre los extremos del conductor, y τ es el coeficiente de Thomson. En la ecuación anterior, J y ΔT tienen el mismo signo si la corriente circula del extremo frío al caliente.

e) Determine (en función de τ y ΔT) la diferencia de potencial ΔV que debe aplicarse al cable para que no emita ni absorba calor.

Sea un cable cilíndrico homogéneo de 3 cm de largo y 5 mm de radio, cuyos extremos se fijan a temperaturas de 273 K y 300 K. Circula una corriente de 2 A del extremo caliente al frío. El cable es de material semiconductor de óxido de zinc de resistividad $\rho = 10^{-5}\ \Omega\text{m}$ y coeficiente de Thomson $\tau = 1{,}50 \times 10^{-4}\ \text{V/K}$.

f) Calcule el calor liberado en el cable en 10 minutos por efecto Joule, por efecto Thomson y el total.

Un galvanómetro para el telégrafo

Kelvin inventó el galvanómetro de espejo, un detector de corriente de alta sensibilidad gracias al cual pudo empezar a funcionar, en 1866, el primer cable telegráfico transatlántico entre Nueva York y Londres.

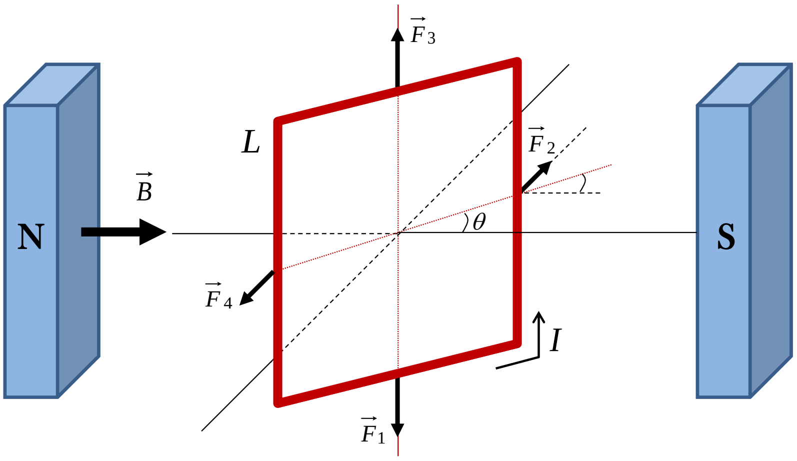
En la figura 2 se muestra una espira cuadrada de lado L por la que circula una corriente I, en el seno de un campo magnético $\vec{B}$ uniforme. La espira puede girar respecto a un eje vertical que pasa por su centro. El plano de la espira está girado un ángulo θ respecto a la dirección del campo magnético.

g) Determine el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre la espira (en función de L, I, B y θ). Justifique que si el campo magnético es radial, como el de la figura 3b, el momento no depende del ángulo.

---

[3] La resistividad de un conductor filiforme es $\rho = RA/L$, donde R es la resistencia.

Fig. 2



El galvanómetro de Kelvin consta de un espejito imantado que cuelga de un hilo de seda. El espejo se coloca en el interior de una bobina por la que circula corriente. El campo magnético creado por la bobina hace girar el espejo (como lo haría con una brújula), de manera que la deflexión de un rayo de luz incidente sobre el espejo indica el paso de la corriente.

Por simplicidad, supondremos que la bobina está suspendida del hilo. El hilo lleva adosado un espejo sin imán (figura 3a) y tiene una constante de torsión[4] k. La bobina consta de N espiras cuadradas de lado L (como las estudiadas en el apartado anterior), y se encuentra dentro de una zona de campo magnético radial (figura 3b). Al pasar la corriente, la bobina queda en equilibrio para un cierto ángulo ϕ para el cual el momento de las fuerzas producidas por el campo iguala al momento torsional del hilo.

Fig. 3a

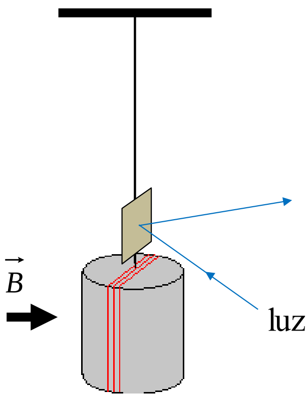
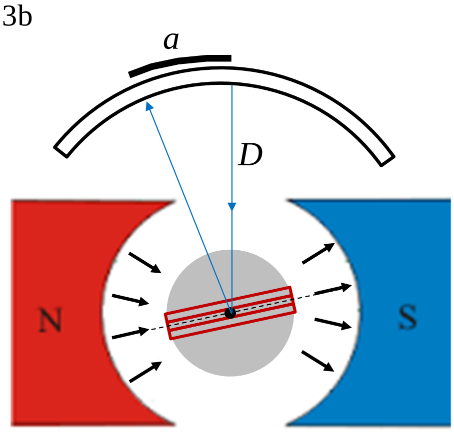


Fig. 3b



h) Determine (en función N, L, B, k y ϕ) la intensidad I que pasa por el galvanómetro.

i) Para una intensidad I la bobina ha rotado un ángulo ϕ respecto a la posición de corriente nula, y el punto de impacto de la luz reflejada en el espejo se desplaza una distancia a sobre una escala circular de radio D (figura 3b). Determine a en función de ϕ y D. ¿Podemos graduar la escala de forma lineal para medir la intensidad?

Finalmente, nos planteamos aumentar la sensibilidad del galvanómetro sin variar el peso total de la bobina ni las características del hilo. Se define la sensibilidad como el cociente ϕ / I .

j) Razone si construiría el instrumento con una espira menos (y, por tanto, con un tamaño de las espiras algo mayor) o con una espira más.

---

[4] De forma análoga a la ley de Hooke, el momento M de una fuerza aplicado sobre una varilla, un hilo, etc., produce una torsión con desplazamiento angular ϕ proporcional al momento: $M = k\phi$, donde k es la constante de torsión.

P3.- SOLUCIÓN

Luminosidad, edad y temperatura del Sol

a) La energía cinética de una masa total *m* de meteoritos viajando a la velocidad de escape v_e, es

$$E_c = \frac{1}{2} m v_e^2 \text{, donde la velocidad de escape del Sol es } v_e = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\odot}}$$

La hipótesis de los meteoritos implica que $L_\odot = E_c / t$, de manera que:

$$L_\odot = \frac{1}{2} m \frac{2GM_\odot}{R_\odot} \frac{1}{t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{m}{t} = \frac{R_\odot L_\odot}{G M_\odot}}$$

En 1 año llegaría al Sol una masa[5] $\boxed{m = 6{,}4 \times 10^{22} \text{ kg}}$

b) La masa esférica interior (entre 0 y *r*) y la masa infinitesimal de una corteza de espesor *dr* son

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{R^3} r^3 \quad \text{y} \quad dm = 4\pi r^2 dr \rho = \frac{3M}{R^3} r^2 dr$$

donde ρ es la densidad constante de la esfera supuestamente homogénea.

La energía potencial de la cáscara infinitesimal es

$$dU = -G \frac{m(r)}{r} dm = -G \frac{3M^2}{R^6} r^4 dr$$

Al realizar la integral queda demostrado el resultado propuesto:

$$U = -G \frac{M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = \boxed{-\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}}$$

A partir de los datos del Sol se obtiene: $\boxed{U_\odot = -2{,}3 \times 10^{41} \text{ J}}$

c) La autoenergía potencial perdida es la diferencia entre la inicial y la actual:

$$U_{R=\infty} - U_\odot = 0 - U_\odot = -U_\odot = |U_\odot|$$

En la contracción de Kelvin-Helmholtz, la mitad de la misma se convierte en radiación:

$$\frac{|U_\odot|}{2} = L_\odot t$$

Así, la edad del Sol estimada por Kelvin fue[6]

$$t = \frac{1}{2} \frac{|U_\odot|}{L_\odot} = 2{,}96 \times 10^{14} \text{ s} \quad \rightarrow \quad \boxed{t = 9{,}4 \text{ millones de años}}$$

d) De forma análoga al apartado anterior, la mitad de $|U_\odot|$ se habría convertido en calor aumentando la temperatura del Sol desde el cero absoluto (estado inicial) hasta $T_\odot$:

[5] Esta masa equivale a un 1% de la masa de la Tierra. Ello implicaría un incremento detectable de la masa del Sol (por ejemplo, al cambiar los períodos orbitales en el Sistema Solar) que, sin embargo, no se observa. Esta hipótesis del bombardeo de meteoritos fue abandonada.

[6] En la época, los geólogos habían estimado la edad del Sol en al menos 1000 millones de años, lo que llevó a una controversia con los físicos. Hoy sabemos que su edad es de unos 4500 millones de años. En el siglo XIX, las reacciones nucleares no se conocían y la mejor explicación para la luminosidad de las estrellas fue el mecanismo que hemos descrito.

.

$$Q = \frac{|U_\odot|}{2} = M_\odot c_\odot \, \Delta T = M_\odot c_\odot (T_\odot - 0)$$

El calor específico supuesto por Kelvin es $c_\odot = 10\, c_{\text{agua}} = 41870$ J/(kg K)

La temperatura estimada[7] es

$$T_\odot = \frac{1}{2}\frac{|U_\odot|}{M_\odot c_\odot} = \boxed{1{,}4 \times 10^6 \text{ K}}$$

Termoelectricidad: efectos Joule y Thomson

e) Como la densidad de corriente es $J = I/A$ y el volumen del cable es $\mathcal{V} = AL$, reescribimos la ecuación (1) de los efectos Joule-Thomson:

$$\frac{P}{\mathcal{V}} = \rho J^2 - \tau \frac{J}{L}\Delta T \quad \rightarrow \quad \frac{P}{AL} = R\frac{A}{L}\frac{I^2}{A^2} - \tau \frac{I}{A}\frac{\Delta T}{L} \quad \rightarrow \quad P = RI^2 - \tau I \Delta T$$

Si hacemos uso de la ley de Ohm, podemos escribir

$$P = I\Delta V - \tau I \Delta T$$

Para que el cable no absorba ni emita calor:

$$P = 0 \quad \rightarrow \quad I\Delta V = \tau I \Delta T \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta V = \tau \Delta T}$$

f) La resistencia vale $R = \rho L / A = 3{,}8197 \times 10^{-3}\ \Omega$

La potencia por efecto Joule es: $P_{\text{J}} = RI^2 = 1{,}5279 \times 10^{-2}$ W

La potencia por efecto Thomson es: $P_{\text{T}} = -\tau I \Delta T = 8{,}1 \times 10^{-3}$ W

En t = 10 min, el calor liberado es:

Joule Q_{J} = 9,167 J = $\boxed{9{,}2 \text{ J}}$; Thomson Q_{T} = 4,860 J = $\boxed{4{,}9 \text{ J}}$, total Q = 14,027 J = $\boxed{14{,}0 \text{ J}}$

Ver notas[8] [9] [10].

Un galvanómetro para el telégrafo

g) Cada lado de la espira es una corriente rectilínea que, al estar dentro de un campo magnético, experimenta una fuerza perpendicular a la corriente y al campo dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = I\, L \vec{u}_I \times \vec{B}$$

donde $\vec{u}_I$ es un vector unitario en el sentido de la corriente.

---

[7] Esta estimación es para la temperatura media. Hoy sabemos que la temperatura del Sol oscila entre los 6000 ºC de su superficie y unos 15 millones de grados en el núcleo.

[8] Los materiales termoeléctricos deben tener baja conductividad térmica (para que no exista flujo de calor entre los extremos) y baja resistividad eléctrica (para minimizar el calor emitido por efecto Joule). Esta combinación se da en los materiales semiconductores.

[9] Los datos de resistividad y el coeficiente de Thomson del óxido de zinc oscilan en un amplio rango dependiendo de las impurezas del material. Hemos utilizado unos valores típicos.

[10] El calor por efecto Joule es irreversible, ya que no depende del sentido de la corriente, y siempre es calor generado. Sin embargo, el calor por efecto Thomson es reversible, pues depende del sentido de la corriente, y puede ser absorbido o cedido dependiendo del sentido relativo de la corriente y el gradiente de temperatura.

.

Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$ sobre los lados horizontales no ejercen momento porque son paralelas al eje de giro.

Las fuerzas sobre los lados verticales son iguales en módulo:

$$F_2 = F_4 = I\,L\,B$$

no dependen del ángulo θ porque $\vec{B} \perp \vec{u}_I$.

El momento que ejercen estas dos fuerzas es $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, con $r = L/2$ y donde el ángulo que forma $\vec{r}$ y $\vec{F}$ es $90° - \theta$. Los dos momentos son iguales y tienen sentidos opuestos:

$$M_2 = M_4 = \frac{L}{2} I\,L\,B \operatorname{sen}(90 - \theta) = \frac{L}{2} I\,L\,B \cos\theta$$

Por tanto, el momento resultante de las fuerzas sobre la espira es:

$$\boxed{M = M_2 + M_4 = I\,L^2\,B \cos\theta}$$

Si los imanes son circulares como en la figura 3b, el campo magnético es radial, es decir, está siempre en el plano de la espira aunque ésta rote. Entonces, las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ actúan siempre perpendicularmente a la espira (y son perpendiculares a $\vec{r}$).

Por tanto: $\boxed{M = I\,L^2\,B}$

h) Como hay N espiras iguales, el momento resultante sobre toda la bobina será

$$M = N\,I\,L^2\,B$$

Este momento crea una torsión sobre el hilo opuesta a la torsión recuperadora del propio hilo, que es proporcional al ángulo girado. Entonces, en la posición de equilibrio donde el galvanómetro marca la lectura se tendrá

$$N\,I\,L^2\,B = k\,\phi \quad \rightarrow \quad \boxed{I = \frac{k\,\phi}{N L^2 B}}$$

i) La intensidad de corriente es proporcional al ángulo girado. Si la bobina/espejo rota un ángulo ϕ , el rayo de luz reflejado se desvía un ángulo 2ϕ .

En definitiva, el segmento circular sobre la escala es $\boxed{a = 2D\phi}$

El segmento a sobre la escala es proporcional a ϕ y, por tanto, es proporcional a la intensidad, lo que significa que sí podemos graduar de forma lineal la escala.

j) La sensibilidad es proporcional al número de espiras y al área de las espiras:

$$\phi / I = N\,L^2\,B / k$$

Como no variamos el peso total de la bobina ni el grosor del cable, su longitud total $\ell = 4NL$ es constante. Entonces, la sensibilidad es proporcional a ℓ^2 / N . Por tanto, interesa utilizar una espira menos siendo el resto de espiras algo mayores.

Ver nota[11].

[11] El galvanómetro de Kelvin es de gran sensibilidad. El espejito imantado colgado del hilo de seda responde a variaciones muy pequeñas del campo magnético que crea la bobina cuando pasan por ella incluso corrientes insignificantes. Gracias a esta sensibilidad se pudo detectar señales pese a las pérdidas en hilos telegráficos de gran longitud.