P4 Radiación de Hawking

Hace hoy exactamente un mes (el 14 de marzo de 2018) falleció Stephen Hawking. Fue un brillante físico teórico de la Universidad de Cambridge que investigó en cosmología sobre el *Big Bang*, los agujeros negros, etc. Sus principales aportaciones se centran en teorías que intentan unificar la relatividad general con la teoría cuántica. También fue un científico muy popular por su trabajo divulgativo sobre el universo. Sirva este problema como pequeño homenaje a este querido personaje de la física.

Consideraremos en todo el problema un agujero negro de masa igual a la del planeta Tierra.

Datos: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ [S.I.]; $M_{\mathrm{T}} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg.

El tamaño de un agujero negro[1] se puede caracterizar mediante el *radio de Schwarzschild*, que es el radio de la superficie esférica que delimita la región de la cual no puede escapar la luz.

a) Calcule el valor del radio de Schwarzschild, R_{S}, del agujero negro considerado.

b) Obtenga la expresión del campo gravitatorio en la superficie de un agujero, en función de c y R_{S}. Calcule su valor, en función de g_0 (campo en la superficie de la Tierra), para el agujero considerado.

El agujero emite radiación de forma equivalente a un cuerpo negro a la llamada *temperatura de Hawking* T_{H}. Esta temperatura es inversamente proporcional a la masa *m* del agujero y depende también de la velocidad de la luz, de la constante de Planck *h*, de la constante de Boltzmann k_{B} y de la constante de gravitación *G*.

c) Obtenga mediante análisis dimensional la expresión para T_{H}, salvo constantes numéricas adimensionales, en función de *m*, *G*, *c*, *h* y k_{B}. (Ayuda: La constante de Planck relaciona la energía de un fotón con su frecuencia: $E = hf$; y la constante de Boltzmann relaciona la energía interna de un objeto con su temperatura absoluta: $E = k_{\mathrm{B}}T$).

El espacio no está realmente vacío, sino lleno de pares partícula/antipartícula virtuales que continuamente se crean y se aniquilan debido a fluctuaciones cuánticas. Así, Hawking descubrió que los agujeros negros no son totalmente negros, sino que pueden emitir radiación. Ello es debido a que puede ocurrir que, para los pares que se crean justo en la superficie del agujero, un miembro del par se forme en el interior y el otro en el exterior, y así uno de los miembros escapa del agujero. Este fenómeno se denomina *radiación de Hawking* e implica, de acuerdo a la equivalencia entre la masa y la energía dada por la ecuación de Einstein de la relatividad especial, $E = mc^2$, que el agujero se iría evaporando y llegaría a desaparecer.

d) Puede calcularse que, para un agujero de masa $m = M_{\mathrm{T}}$, la radiación de Hawking es aproximadamente 10^{-14} W por cada metro cuadrado de superficie del agujero. Estime una cota superior al tiempo que debe transcurrir para que el agujero desaparezca por completo.

[1] Recordemos que un agujero negro es un objeto con una concentración de masa lo suficientemente elevada como para crear un campo gravitatorio tal que ninguna partícula material, ni siquiera la luz, puede escapar de él.

P4 Solución

a) La velocidad de escape de una superficie de radio igual al radio de Schwarzschild debe ser igual a la velocidad de la luz:

$$v_e = \sqrt{\frac{2Gm}{R_\mathrm{S}}} = c$$

donde m es la masa del agujero. Despejando se obtiene el radio pedido:

$$R_\mathrm{S} = \frac{2Gm}{c^2}$$

que, con $m = M_\mathrm{T} = 5{,}97\times10^{24}\ \mathrm{kg}$, resulta: $R_\mathrm{S} = 8{,}85\times10^{-3}\ \mathrm{m} \approx 9\ \mathrm{mm}$

b) El campo gravitatorio que crea un agujero de radio R_S es

$$g = \frac{Gm}{R_\mathrm{S}^2} = \frac{Gm}{\left(2Gm/c^2\right)^2} = \frac{c^4}{4Gm} \quad \rightarrow \quad g = \frac{c^2}{2R_\mathrm{S}}$$

Para el agujero negro considerado, el resultado es:

$$g = 5{,}08\times10^{18}\ \mathrm{m/s^2} \quad \rightarrow \quad g \approx 5\times10^{17}\, g_0$$

c) Según el enunciado, T_H es inversamente proporcional a la masa. También será inversamente proporcional a la constante de Boltzmann, ya que ésta tiene unidades de energía entre temperatura y el resto de magnitudes no depende de la temperatura. Entonces hemos de hallar los parámetros α, β y γ que satisfagan

$$[T] = \left[\frac{c^\alpha h^\beta G^\gamma}{m k_\mathrm{B}}\right]$$

Teniendo en cuenta las unidades de cada magnitud:

$$[m] = \mathrm{M}\,,\ [T] = \Theta\,,\ [c] = \mathrm{L\,T^{-1}}\,,\ [h] = \mathrm{M\,L^2\,T^{-1}}\,,\ [G] = \mathrm{M\,L^3\,T^{-2}}\,,\ [k_\mathrm{B}] = \mathrm{M\,L^2\,T^{-2}\,\Theta^{-1}}$$

hemos de resolver el sistema: $\begin{cases} 2 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ 2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ \beta = 2 + \gamma \end{cases}$, cuya solución es: $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$

Por tanto, la temperatura de Hawking es: $T_\mathrm{H} \propto \dfrac{c^3 h}{m G k_\mathrm{B}}$

d) Debido a la radiación de Hawking, transcurrido el tiempo suficiente habrá desaparecido una energía equivalente a toda la masa del agujero de acuerdo a la ecuación de Einstein:

$$E = M_\mathrm{T} c^2 = 5{,}37\times10^{41}\ \mathrm{J}$$

Suponemos que el agujero radia con una potencia constante dada por

$$P = \left(4\pi R_\mathrm{S}^2\right) I = 4\pi\,(8{,}85\times10^{-3})^2\,(10^{-14}) \approx 10^{-17}\ \ \mathrm{W}$$

El tiempo necesario es para la "evaporación" total: $t < E/P = 5{,}37\times10^{58}\ \ \mathrm{s} \quad \rightarrow \quad t < 10^{51}\ $ años

---

* Nota: En realidad, la potencia radiada no es constante ya que, de acuerdo a la ley de Stefan-Boltzmann, la potencia es proporcional a la temperatura elevada a la cuarta potencia y, por tanto, decrece con la inversa de la masa al cuadrado. El tiempo necesario para la desaparición total del agujero, tras realizar la correspondiente integral, es exactamente 1/3 del que hemos obtenido, que nos sirve como cota superior.