Prueba experimental. El vuelo del capacillo[1]

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido con velocidad v, su movimiento se ve frenado por una fuerza, llamada de *resistencia*. Supongamos que esta fuerza depende de v en la forma

$$F = c\,v^{\gamma}$$

donde c y γ son constantes que dependen de la forma y tamaño del cuerpo y de las características del fluido (densidad y viscosidad).

En este problema se va a estudiar experimentalmente la caída en el aire de uno o varios capacillos superpuestos, de manera que cambia la masa del objeto que cae, pero no su forma (aerodinámica). Como podrá comprobar, la velocidad de caída es prácticamente uniforme desde el momento en que se sueltan.

a) Las únicas fuerzas que actúan sobre los capacillos cuando caen son su peso y la resistencia del aire. Teniendo esto en cuenta, y llamando n al número de capacillos y m_0 a la masa de cada uno, obtenga una expresión analítica para la velocidad uniforme (límite) de caída, v_n. Transforme esta expresión y demuestre que existe una dependencia entre el logaritmo de t_n y el tiempo de caída de n capacillos desde una altura h, es

$$\ln(t_n) = -\frac{1}{\gamma}\ln(n) - \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{m_0 g}{c}\right) + \ln(h)$$

donde t_n es el tiempo de caída de n capacillos desde una altura h,

b) Basándose en la expresión anterior y en sus medidas experimentales de tiempos de caída, tn, para $n = 1$, 2, 3 y 4, determine el valor de γ en este experimento.

c) Haga una estimación de la incertidumbre (margen de error) del valor de γ obtenido.

d) A partir de las medidas experimentales que considere oportunas, determine la masa M de la arandela metálica que se suministra. Para responder a esta pregunta, tenga en cuenta que la masa de un capacillo es $m_0 = 0{,}25$ g.

Material del que dispone:

- Cuatro capacillos de igual masa, m_0.
- Un cronómetro.
- Papel milimetrado.
- Una arandela de masa M desconocida.
- Cinta adhesiva.

Comentarios y sugerencias:

- Dispone inicialmente de cuatro capacillos superpuestos y bien empaquetados (compruebe que efectivamente hay cuatro). Comience midiendo el tiempo de caída de este conjunto y, después, vaya retirándolos con cuidado uno a uno, para que el resto sigan bien unidos.
- La forma de los capacillos influye notablemente en el valor de la fuerza de resistencia, a través de la constante c. Por tanto, debe tener especial cuidado de no deformarlos durante las medidas. Si alguno se deforma demasiado, puede pedir otro de repuesto... pero ya no se superpondrá con los otros tan bien como el original.
- Deje caer los capacillos con la parte abierta hacia arriba (al revés que un paracaídas).
- Déjelos caer desde la máxima altura h que le permita su brazo. No necesita conocer el valor de h; basta con que sea siempre el mismo (aproximadamente).

[1] Una prueba experimental muy similar a ésta fue propuesta en la IX Olimpiada Iberoamericana de Física, que se celebró en La Habana (Cuba) en septiembre de 2003. Por deferencia a sus autores, hemos mantenido el nombre de *capacillos* para los moldes de magdalena.

- Emplee la cinta adhesiva para fijar la arandela a la base de un capacillo, por su lado interior. Use un pequeño trocito de cinta, para que su masa sea despreciable frente a la de la arandela.
- En la hoja de respuestas tiene una tabla para ordenar todas sus medidas y los datos que obtenga a partir de ellas.
- Emplee el papel milimetrado para realizar las gráficas y ajustes que considere oportunos.

Hoja de respuestas

Tabla de datos

Solución

a) Una vez alcanzada la velocidad uniforme (límite) de caída

$$\text{Aceleración nula} \quad \Rightarrow \quad n\, m_0\, g = c v_n^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_n = \left(\frac{n\, m_0\, g}{c}\right)^{1/\gamma}}$$

Tomando logaritmos en la expresión anterior

$$\ln(v_n) = \frac{1}{\gamma}\ln(n) + \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{m_0\, g}{c}\right) \tag{1}$$

El tiempo de caída desde una altura h es

$$t_n = \frac{h}{v_n} \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene inmediatamente

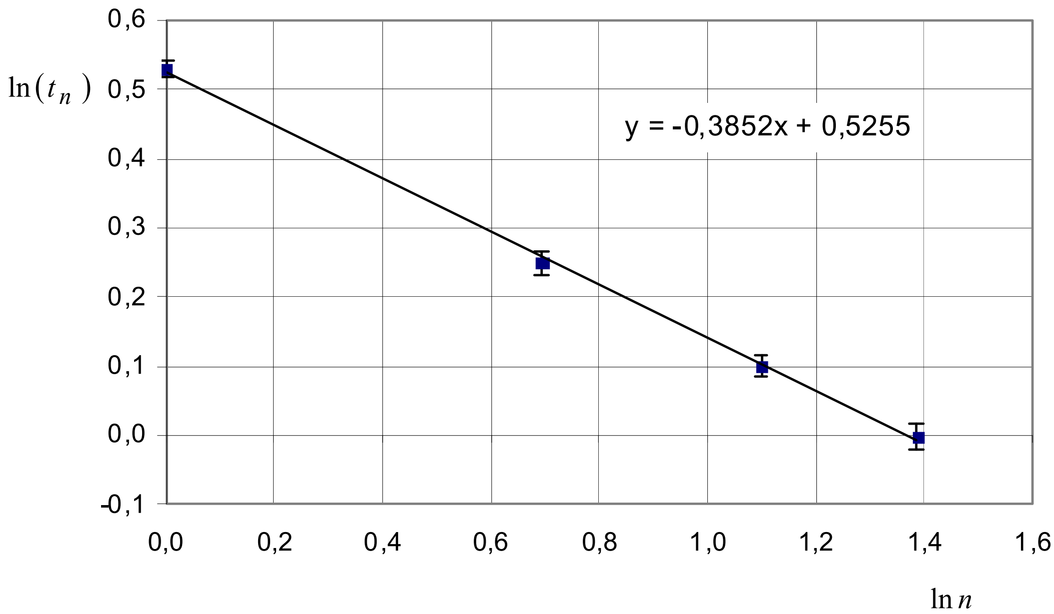
$$\boxed{\ln(t_n) = -\frac{1}{\gamma}\ln(n) - \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{m_0 g}{c}\right) + \ln(h)}$$

Por tanto, se obtiene una dependencia lineal entre $\ln(t_n)$ y $\ln(n)$, con pendiente $-1/\gamma$.

b) En la tabla de la hoja de respuestas se tabulan diez medidas de cada tiempo de caída (desde $h \approx 2{,}1$ m), junto con su valor medio y su incertidumbre Δt_n, calculada como el doble del error típico (nivel de confianza 95 %). En las últimas columnas aparecen los datos para la gráfica: $\ln(n)$, $\ln(t_n)$ y la incertidumbre Δ_n propagada a este último dato, calculada en la forma

$$\Delta_n = \Delta[\ln(t_n)] = \frac{\Delta t_n}{t_n}$$

En la siguiente gráfica se presenta el ajuste de estos puntos a una recta (realizado con Excel)



Se obtiene

$$\ln(t_n) = -0{,}3852\ \ln(n) + 0{,}5255 \tag{3}$$

Por tanto

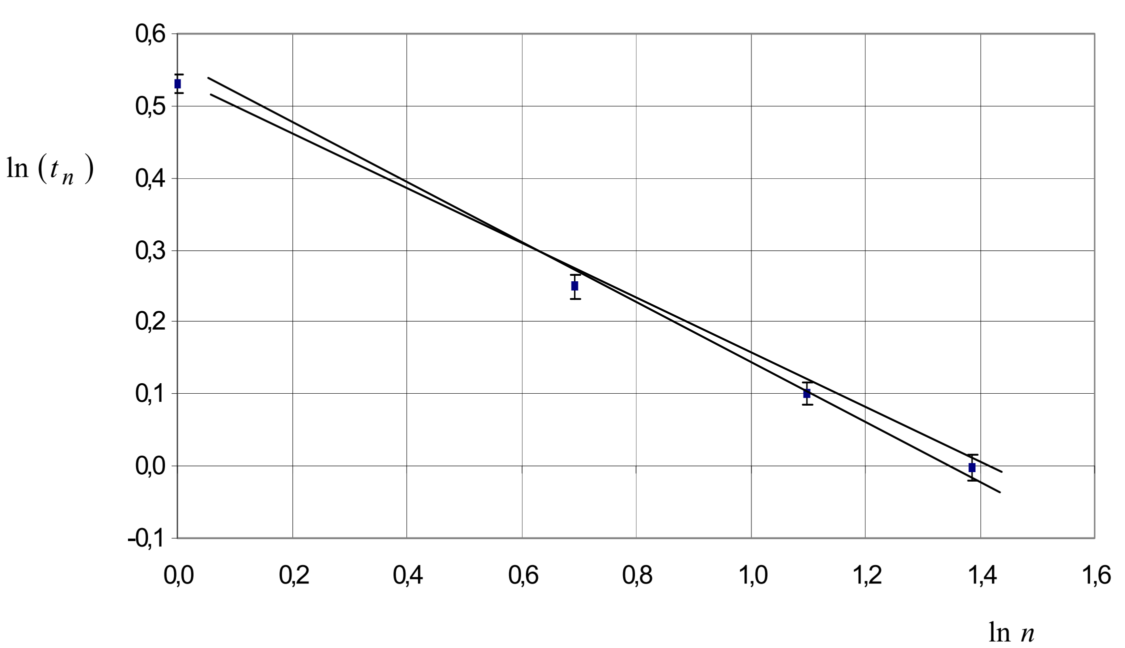
$$\gamma = \frac{1}{0,3852} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = 2,60}$$

c) La incertidumbre de γ se puede estimar a partir de las rectas que se ajustan razonablemente a los puntos experimentales con pendientes máxima y mínima, teniendo en cuenta las incertidumbres de dichos puntos.

Midiendo sobre la gráfica anterior se obtiene[2]

$$\left.\begin{array}{lll} p_{\max} \approx -0,37 & \Rightarrow & \gamma_{\max} \approx 2,7 \\ p_{\min} \approx -0,40 & \Rightarrow & \gamma_{\min} \approx 2,5 \end{array}\right\}$$

$$\Delta\gamma = \frac{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\gamma \approx 0,1}$$



En total, el resultado completo para γ sería $\gamma = 2,6 \pm 0,1$.

d) En la última fila de la tabla de la hoja de respuestas se presentan diez tiempos de caída de un capacillo con la arandela en su interior. Se obtiene un tiempo medio de caída t = 1,158 s.

Sustituyendo en la ecuación (3) de la recta ajustada y operando, se obtiene que este tiempo de caída corresponde a un número equivalente de capacillos

$$n = 2,67$$

Por tanto, la masa de la arandela es[3]

$$M = 1,67\, m_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 0,42 \text{ g}}$$

Teniendo en cuenta únicamente la incertidumbre del tiempo de caída y propagando errores, se obtiene

$$M = (0,42 \pm 0,03)\ g\,.$$

---

[2] Se llega a un resultado similar calculando analíticamente el error típico de la pendiente.

[3] La masa real de la arandela empleada en las medidas es M = 0,40 g.

Hoja de respuesta

Tabla de datos

n	Tiempos de caída (s)										$\bar{t}_n$ (s)	Δt_n (s)	$\ln(n)$	$\ln(t_n)$	Δ_n
1	1,67	1,68	1,65	1,73	1,68	1,69	1,73	1,75	1,69	1,73	1,700	0,0207	0,0000	0,5306	0,0122
2	1,25	1,31	1,30	1,29	1,23	1,33	1,30	1,25	1,32	1,25	1,283	0,0221	0,6931	0,2492	0,0172
3	1,07	1,10	1,08	1,11	1,07	1,15	1,10	1,12	1,12	1,13	1,105	0,0167	1,0986	0,0998	0,0151
4	0,99	0,96	0,98	0,99	1,04	1,00	1,05	1,00	0,99	0,98	0,998	0,0173	1,3863	-0,0020	0,0173
1+arand.	1,13	1,17	1,19	1,17	1,18	1,12	1,17	1,18	1,17	1,10	1,158	0,0194		0,1467	