Prueba experimental. Determinación del módulo de cizalladura del cobre.

Objetivo

El *módulo de cizalladura* (también llamado de *corte*, de *rigidez* o de *elasticidad transversal*) es una constante de cada material elástico que caracteriza la deformación que sufre el material cuando se somete a un *esfuerzo de corte*, es decir aplicado en dirección tangente a la superficie sobre la que actúa.

El principal objetivo de esta prueba es determinar experimentalmente el módulo de cizalladura del cobre a partir de medidas del periodo de oscilación de un *péndulo de torsión*, formado por un hilo cilíndrico de cobre del que se suspende una arandela metálica (figura 1).

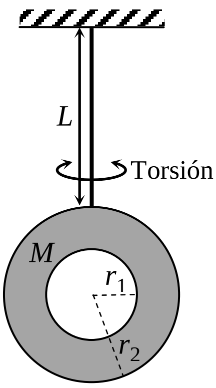


Fig. 1

Material (véase la figura 2)

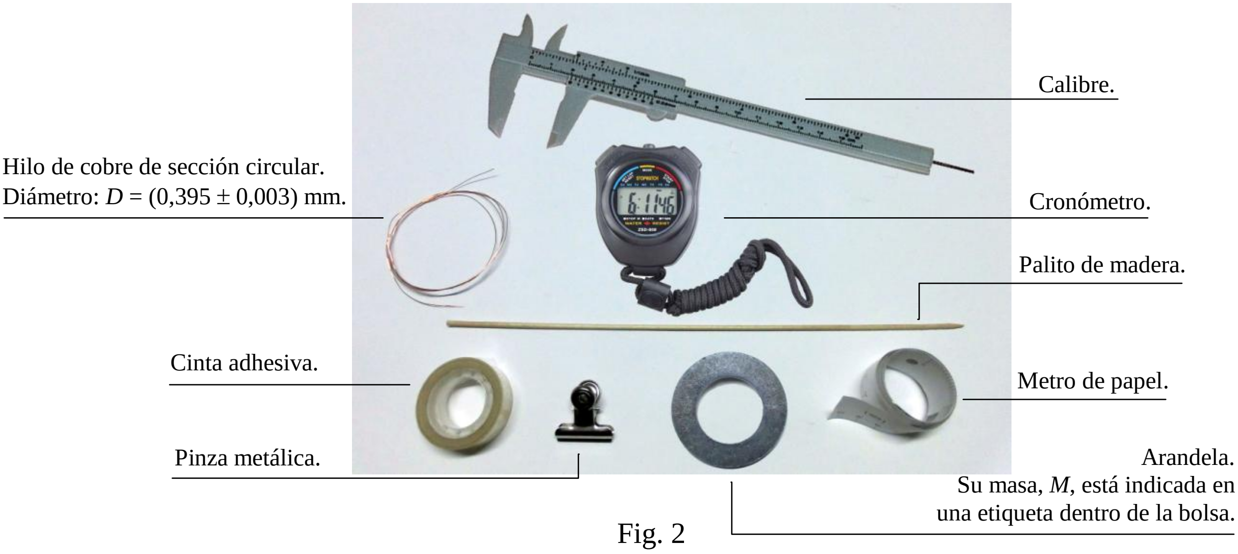


Fig. 2

Modelo teórico.

Se demuestra que, para pequeñas deformaciones torsionales del hilo, el periodo de oscilación de un péndulo de torsión, T, viene dado por

$$T = \left(\frac{8\pi I}{G R^4} L \right)^{1/2} \qquad (1)$$

donde L es la longitud del hilo, R el radio de su sección, G el módulo de cizalladura del material del hilo e I el *momento de inercia*[1] de la arandela respecto a un eje diametral. Supuesto que el grosor de la arandela es pequeño comparado con sus radios, I viene dado por

$$I = \frac{1}{4} M \left(r_1^2 + r_2^2 \right) \qquad (2)$$

donde M es la masa de la arandela, y r_1 y r_2 son sus radios interior y exterior (figura 1).

[1] El momento de inercia de un sólido rígido es una magnitud que caracteriza su inercia rotacional, es decir su "resistencia" a los cambios de velocidad angular de rotación en torno a un eje.

Procedimiento experimental

Determinación de *I*.

1) Mida con el calibre los diámetros interior y exterior de la arandela. Calcule su momento de inercia. (2 p.)
2) Haga una estimación de la incertidumbre del momento de inercia, ΔI. Suponga que la incertidumbre de M es $\Delta M = 0{,}01$ g. (2 p.)

Determinación de *G*.

Atención: El hilo del péndulo que se va a construir tiene que quedar recto y vertical, por lo que debe tener especial cuidado en evitar que el hilo se doble.

Fije sobre la mesa el metro de papel, con cinta adhesiva. Fije también sobre la mesa el palito de madera, de forma que sobresalga unos centímetros del borde.

Con un pequeño nudo, ate la arandela en un extremo del hilo de cobre. El nudo debe quedar lo más cerca posible del borde de la arandela. Asegúrese de que, al suspender la arandela del hilo, ésta queda en un plano vertical.

Sujete el hilo con la pinza y cuelgue el péndulo, pasando el palito por los orificios de la pinza (figura 3). Ajuste la longitud de hilo, L, al valor máximo que permita la altura de la mesa, sin que la arandela toque el suelo.

Extienda el péndulo sobre el metro y mida la longitud del hilo, L.

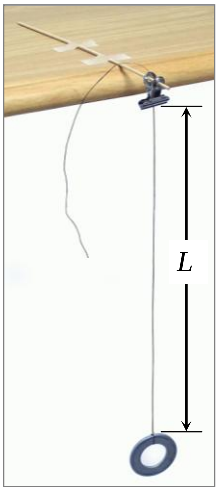


Fig. 3

3) Mida el periodo T de las oscilaciones torsionales del péndulo. Repita el proceso para valores de L decrecientes, hasta unos 25 cm. Presente sus resultados en una tabla. (2 p.)

Según la ecuación (1), se espera una dependencia lineal entre T^2 y L.

4) Represente gráficamente en un papel milimetrado los puntos correspondientes a esta dependencia. (3 p.)
5) Determine la pendiente, p, de la recta que mejor se ajusta a esos puntos. (2 p.)
6) Deduzca el valor del módulo de cizalladura del cobre, G. (2 p.)

Para hacer una estimación de la incertidumbre de este módulo, ΔG, habría que considerar tres fuentes de error: radio del hilo, momento de inercia y pendiente de la recta ajustada.

7) Suponiendo que la fuente de incertidumbre dominante es la del radio del hilo, haga una estimación de ΔG. (3 p.)

Comprobación de la dependencia *T*(*L*)

La ecuación (1) indica que se espera T proporcional a $L^{1/2}$.

Imagine ahora que no conoce esta dependencia, y que plantea la hipótesis $T = K L^n$, donde K es una constante y n es un número desconocido, que se espera racional sencillo (entero, semientero…).

8) A partir de su serie de datos experimentales y la gráfica que considere oportuna[2], compruebe que el exponente adecuado es n =1/2. (4 p.)

[2] Diferente de la realizada en el apartado 4.

Prueba experimental. Solución

Determinación de *I*.

1) Los diámetros interior y exterior de la arandela se miden con el calibre. Se obtiene

$$d_1 = 31,20 \text{ mm} \rightarrow r_1 = 15,60 \text{ mm}$$

$$d_2 = 54,90 \text{ mm} \rightarrow r_2 = 27,45 \text{ mm}$$

La masa de la arandela empleada es M = 48,71 g.

Con estos datos se obtiene un momento de inercia

$$\boxed{I = 1,2139 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2}$$

2) La resolución del calibre empleado es de 0,05 mm. Vamos a suponer que la incertidumbre de los diámetros medidos es igual a esta resolución[3]

$$\Delta d = 0,05 \text{ mm}$$

Por tanto, la incertidumbre de los radios es

$$\Delta r = 0,025 \text{ mm}$$

En cuanto a la incertidumbre de M, en el enunciado se indica que

$$\Delta M = 0,01 \text{ g}$$

Para obtener una estimación de la incertidumbre del momento de inercia, ΔI, es necesario "propagar" las incertidumbres de M, r_1 y r_2. Puede hacerse una estimación numérica rápida de ΔI calculando el valor de I en los casos extremos

$$\Delta I = \frac{1}{2}\left(I_{\max} - I_{\min}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left[(M + \Delta M)\left((r_1 + \Delta r)^2 + (r_2 + \Delta r)^2\right) - (M - \Delta M)\left((r_1 - \Delta r)^2 + (r_2 - \Delta r)^2\right)\right] =$$
$$= 2,9 \times 10^{-8} \text{ kg m}^2$$

Con el método anterior nos ponemos "en el peor de los casos", por lo que suele sobreestimarse la incertidumbre buscada. Es más correcto realizar una estimación independiente de la contribución de cada una de las fuentes de error, determinando por separado ΔI_M, ΔI_{r_1} y ΔI_{r_2}.

$$\Delta I_M = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(M + \Delta M)\left(r_1^2 + r_2^2\right) - \frac{1}{4}(M - \Delta M)\left(r_1^2 + r_2^2\right)\right] = \frac{1}{4}\Delta M\left(r_1^2 + r_2^2\right) = 2,49 \times 10^{-9} \text{ kg m}^2$$

Nota: de una forma matemáticamente más elegante (aunque en general no más precisa)

$$\Delta I_M = \left|\frac{\partial I}{\partial M}\right| \Delta M = \frac{1}{4}\Delta M\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$

[3] También sería razonable admitir una incertidumbre igual a la mitad de la resolución, es decir 0,025 mm, pero la falta de regularidad de la arandela y la no excesiva calidad del calibre aconsejan optar por un valor mayor.

$$\Delta I_{r_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}M\left((r_1+\Delta r)^2 + r_2^2\right) - \frac{1}{4}M\left((r_1-\Delta r)^2 + r_2^2\right)\right] = \frac{1}{2}M\, r_1 \Delta r = 9{,}50\times 10^{-9}\ \mathrm{kg\, m^2}$$

$$\Delta I_{r_2} = \frac{1}{2}M\, r_2 \Delta r = 1{,}67\times 10^{-8}\ \mathrm{kg\, m^2}$$

Podría obtenerse ΔI sumando estas tres contribuciones pero, como son independientes, es más correcto considerar

$$\Delta I = \left[\Delta I_M^2 + \Delta I_{r_1}^2 + \Delta I_{r_2}^2\right]^{1/2}$$

Se obtiene por fin

$$\boxed{\Delta I = 1{,}9\times 10^{-8}\ \mathrm{kg\, m^2}}$$

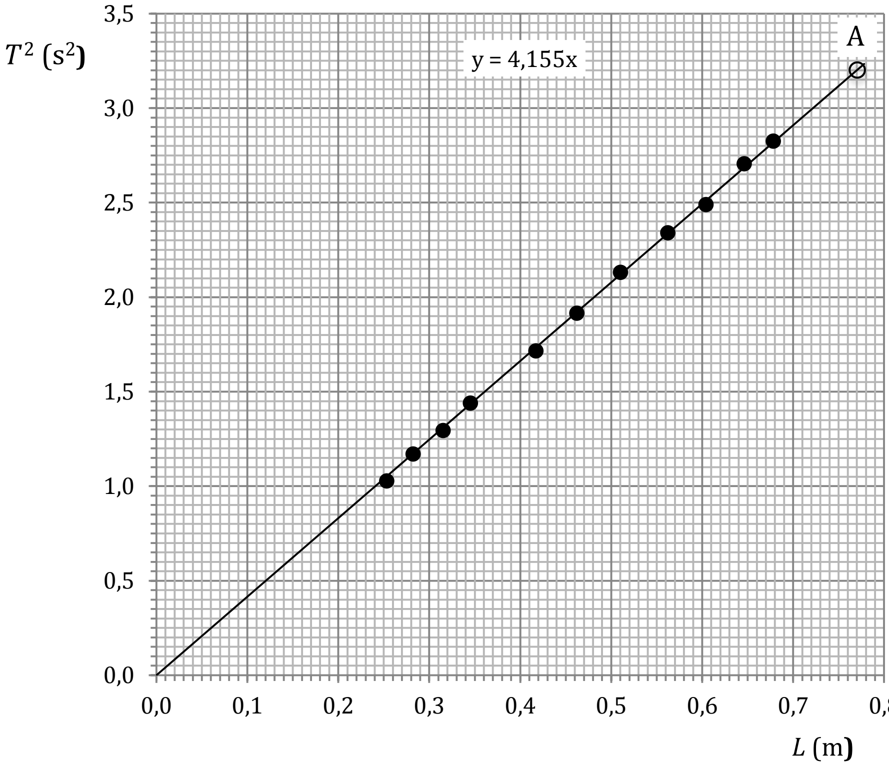
Nótese que la incertidumbre relativa $\Delta I / I = 1{,}6\times 10^{-3}$ es muy baja, inferior al 0,2 %.

Determinación de *G*.

3) Para determinar con buena precisión T conviene cronometrar un número elevado de oscilaciones. Dado que se amortiguan con cierta rapidez, se han cronometrado sólo diez oscilaciones. Los resultados se presentan en la siguiente tabla, junto con otras magnitudes que se necesitarán más adelante

L (m)	$10T$ (s)	T (s)	T^2 (s^2)	Ln L	Ln T
0,678	16,81	1,68	2,83	0,5194	-0,3886
0,646	16,45	1,65	2,71	0,4977	-0,4370
0,604	15,78	1,58	2,49	0,4562	-0,5042
0,562	15,30	1,53	2,34	0,4253	-0,5763
0,510	14,60	1,46	2,13	0,3784	-0,6733
0,462	13,84	1,38	1,92	0,3250	-0,7722
0,417	13,10	1,31	1,72	0,2700	-0,8747
0,345	12,00	1,20	1,44	0,1823	-1,0642
0,315	11,38	1,14	1,30	0,1293	-1,1552
0,282	10,82	1,08	1,17	0,0788	-1,2658
0,253	10,14	1,01	1,03	0,0139	-1,3744

4) A continuación se presenta la gráfica pedida. De acuerdo con el modelo teórico previsto, los puntos experimentales se ajustan bien a una línea recta con ordenada en el origen nula.



5) La pendiente puede obtenerse a partir de las coordenadas de un punto auxiliar sobre la recta, lejos del origen para mejorar la precisión, como el punto A indicado en la gráfica

$$p = \frac{y_A}{x_A} = \frac{3,20\ \text{s}^2}{0,770\ \text{m}} = 4,16\ \text{s}^2/\text{m}$$

Con el método de ajuste de "mínimos cuadrados" se obtiene la pendiente indicada en la gráfica, que prácticamente coincide con la obtenida "manualmente".

6) Teniendo en cuenta la ecuación (1) del enunciado, el módulo de cizalladura puede obtenerse a partir de la pendiente de la recta anterior

$$p = \frac{8\pi I}{GR^4} \qquad \rightarrow \qquad G = \frac{8\pi I}{pR^4}$$

Se obtiene $\boxed{G = 4,82\times 10^{10}\ \text{kg}\,\text{m}^{-1}\text{s}^{-2} = 48,2\ \text{GPa}}$

7) Como indica el enunciado, para estimar la incertidumbre de G sería necesario transmitir las incertidumbres de I, p y R. La incertidumbre relativa de I es muy baja, y también va a ser baja la de la pendiente, ya que los puntos experimentales $T^2(L)$ están muy bien alineados[4]. La contribución propagada del radio del hilo puede calcularse numéricamente considerando los casos extremos, como hemos hecho en el apartado 2) para estimar ΔI, o también en la forma

$$\Delta G_R = \left|\frac{\partial G}{\partial R}\right| \Delta R = 4\frac{8\pi I}{pR^5}\Delta R \qquad \rightarrow \qquad \Delta G_R = 4G\frac{\Delta R}{R} = 1,5\times 10^9\ \text{Pa}$$

[4] El error típico de la pendiente es $\Delta p = 0,009\ \text{s}^2/\text{m}$, por lo que $\Delta p / p$ es del orden del 0,2 %.

Nótese que, como G es proporcional a R^{-4}, la incertidumbre relativa $\Delta G_R / G$ es cuatro veces mayor que la del radio, $\Delta R / R$. En concreto, R se conoce con una incertidumbre del 0,76 %, que se transmite como poco más de un 3 % a la incertidumbre de G. Este valor es muy superior a $\Delta I / I$ y $\Delta p / p$, lo que justifica que se desprecien estas dos fuentes de error, como indica el enunciado.

En total

$$\boxed{\Delta G = 1{,}5\,\mathrm{GPa}}$$

El resultado final del experimento sería:

$$G = (48{,}2 \pm 1{,}5)\ \mathrm{GPa}$$

Comprobación de la dependencia *T*(*L*).

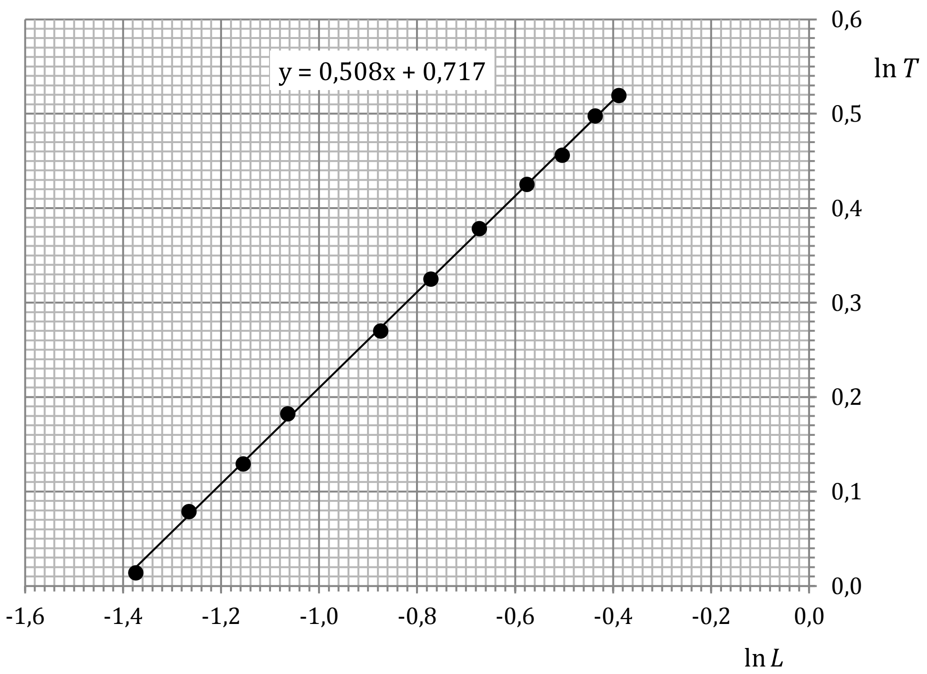
8) Como se indica en el enunciado, supongamos una dependencia entre T y L de la forma

$$T = K\,L^n$$

con n en principio desconocido. Al tomar logaritmos en esta expresión se obtiene

$$\ln T = \ln K + n \ln L$$

Por tanto, se espera una dependencia lineal de $\ln T$ frente a $\ln L$ con pendiente $p = n$. A continuación se presenta esta gráfica para nuestros puntos experimentales



Se observa que, en efecto, los puntos están bien alineados, con una pendiente que puede determinarse a partir de dos puntos auxiliares alejados sobre la recta, o aplicando el método de mínimos cuadrados. En cualquier caso se obtiene una pendiente muy próxima a la esperada

$$\boxed{n = 1/2}$$