P3. Un tapón oscilante.

Suponga que dispone de un matraz como el que se representa en la figura 1, constituido por un bulbo de volumen *V*, lleno de aire a presión atmosférica p_0, y de un cuello de sección *S*, en el que hay un tapón de masa *m* y longitud *L* que puede deslizar sin rozamiento.

En un cierto instante se empuja ligeramente el tapón una distancia *x* ($x \ll L$) y, como consecuencia, el volumen de aire dentro del bulbo experimenta una disminución ΔV y su presión un aumento Δp (figura 2). A continuación el sistema se libera y se observa que el tapón realiza un movimiento oscilatorio armónico.

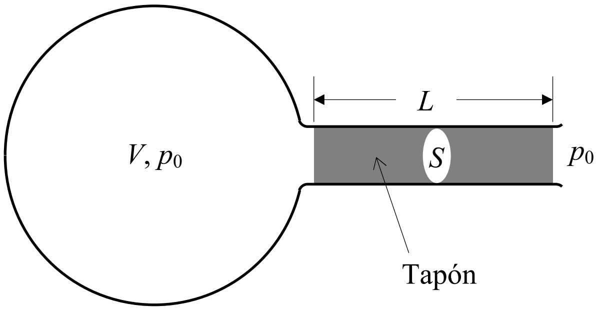

Fig. 1

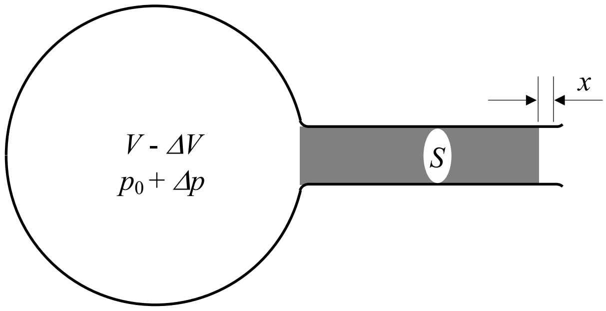

Fig. 2

Sabiendo que el coeficiente de compresibilidad del aire, κ, que se define como

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

a) Demuestre que la frecuencia angular, ω, de s oscilaciones del tapón es

$$\omega = \sqrt{\frac{S^2}{mV\kappa}}$$

El valor del cociente $\Delta V / \Delta p$, y por tanto el del coeficiente de compresibilidad, depende del tipo de transformación termodinámica que experimenta el gas. En el caso del aire que contiene el bulbo, la transformación puede considerarse adiabática, puesto que es despreciable la cantidad de energía (calor) que intercambia con su entorno en el breve tiempo de cada expansión o compresión.

En las transformaciones adiabáticas, las variaciones de la presión y del volumen están relacionadas en la forma

$$\gamma \Delta V + V \Delta p = 0$$

donde γ es el llamado *índice adiabático*.

b) Determine en este caso la dependencia de κ con la presión y el índice adiabático.

Considere en adelante que la densidad del tapón es igual a la del aire, lo que equivale a decir que es un *tapón de aire*, y que la experiencia se realiza a una temperatura $T = 300$ K.

c) Suponiendo que el aire es un gas perfecto, obtenga la expresión de la frecuencia angular de las oscilaciones, ω', en función de γ, *S*, *T*, *V*, *L*, *R* (constante de los gases) y de *M* (masa molar del aire).

d) Con los siguientes datos numéricos, calcule el valor de la frecuencia, *f*, de las oscilaciones.

Volumen del bulbo:	$V = 1{,}0 \times 10^{-3}$ m^3
Sección y longitud del cuello del matraz:	$S = 1{,}0 \times 10^{-4}$ m^2 $\quad L = 5{,}0 \times 10^{-2}$ m
Índice adiabático del aire:	$\gamma = 1{,}4$
Constante de los gases:	$R = 8{,}314$ J mol^{-1} K^{-1}
Masa molar del aire:	$M = 2{,}9 \times 10^{-2}$ kg mol^{-1}

Real Sociedad Española de Física
R.S.E.F.
XVI OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA
IN LUMINE SAPIENTIA UNIVERSITAS ALMERIENSIS

Solución

a) Cuando el tapón se introduce una distancia *x*, la disminución del volumen de aire dentro del bulbo es

$$\Delta V = x\,S \qquad (1)$$

La fuerza que actuará sobre el tapón (figura 3) es

$$F = \Delta p S$$

Fig. 3

por lo que su aceleración será

$$a = \frac{1}{m}\Delta p S \qquad (2)$$

Despejando Δp de la expresión del coeficiente de compresibilidad, sustituyendo en (2) y teniendo en cuenta (1)

$$a = -\frac{S^2}{mV\kappa}x$$

que es la aceleración de un movimiento oscilatorio armónico, con frecuencia angular

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{S^2}{mV\kappa}}} \qquad (3)$$

b) De acuerdo con la expresión que proporciona el enunciado,

$$\frac{\Delta V}{\Delta p} = -\frac{V}{\gamma\, p}$$

por lo que el coeficiente de compresibilidad es

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa = \frac{1}{\gamma\, p}} \qquad (4)$$

c) Si el tapón es de aire, su masa es

$$m = \rho\, SL$$

donde ρ es la densidad del aire.

Teniendo en cuenta la expresión (4), la frecuencia angular (3) de oscilación toma la forma

$$\omega'^2 = \frac{S}{\rho\, LV}\gamma\, p \qquad (5)$$

Por otra parte, si llamamos m_B a la masa de aire del bulbo, la densidad del aire es

$$\rho = \frac{m_B}{V} \qquad (6)$$

y a su vez, si en el bulbo hay *n* moles de aire

$$m_B = nM \qquad (7)$$

en la que *M* es la masa molar del aire. Por la ley de los gases

$$p = \frac{1}{V} nRT \qquad (8)$$

Llevando (6), (7) y (8) a la expresión (5), queda finalmente

$$\boxed{\omega' = \sqrt{\frac{S\gamma R}{LVM} T}}$$

d) Con los datos numéricos del enunciado se obtiene,

$$\omega' = 4{,}9 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la frecuencia de las oscilaciones es

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f \approx 78 \text{ Hz}}$$

Esta frecuencia es del orden de la del sonido que produce el “descorche” de una botella de características similares a la que se ha descrito.