



Universidad  
Rey Juan Carlos  
Móstoles, Madrid, España

# Introducción al Caos Determinista: El Problema de los 3 Cuerpos

**Miguel Angel Fernández Sanjuán**

Departamento de Física

Grupo de Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos

Universidad Rey Juan Carlos

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales



R.S.E.F.



Real  
Sociedad  
Española de  
Física

R.S.E.F.

Jornada de Enseñanza de la Física

1 de diciembre de 2016

*El nuevo currículo de Física 2º Curso Bachillerato LOMCE*

Grupo Especializado de  
Enseñanza de la Física



## FISICA 2º DE BACHILLERATO

- BLOQUE 1: LA ACTIVIDAD CIENTIFICA
- BLOQUE 2: INTERACCION GRAVITATORIA
- BLOQUE 3: INTERACCION ELECTROMAGNETICA
- BLOQUE 4: ONDAS
- BLOQUE 5: OPTICA GEOMETRICA
- BLOQUE 6: FISICA DEL SIGLO XX

# FISICA 2º BACHILLERATO

## Bloque 2. Interacción gravitatoria

Campo gravitatorio.  
Campos de fuerza conservativos.  
Intensidad del campo gravitatorio.  
Potencial gravitatorio.  
Relación entre energía y movimiento orbital.  
Caos determinista.

1. Asociar el campo gravitatorio a la existencia de masa y caracterizarlo por la intensidad del campo y el potencial.
2. Reconocer el carácter conservativo del campo gravitatorio por su relación con una fuerza central y asociarle en consecuencia un potencial gravitatorio.
3. Interpretar las variaciones de energía potencial y el signo de la misma en función del origen de coordenadas energéticas elegido.
4. Justificar las variaciones energéticas de un cuerpo en movimiento en el seno de campos gravitatorios.
5. Relacionar el movimiento orbital de un cuerpo con el radio de la órbita y la masa generadora del campo.
6. Conocer la importancia de los satélites artificiales de comunicaciones, GPS y meteorológicos y las características de sus órbitas.
7. Interpretar el caos determinista en el contexto de la interacción gravitatoria.

- 1.1. Diferencia entre los conceptos de fuerza y campo, estableciendo una relación entre intensidad del campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad.
- 1.2. Representa el campo gravitatorio mediante las líneas de campo y las superficies de energía equipotencial.
- 2.1. Explica el carácter conservativo del campo gravitatorio y determina el trabajo realizado por el campo a partir de las variaciones de energía potencial.
- 3.1. Calcula la velocidad de escape de un cuerpo aplicando el principio de conservación de la energía mecánica.
- 4.1. Aplica la ley de conservación de la energía al movimiento orbital de diferentes cuerpos como satélites, planetas y galaxias.
- 5.1. Deduce a partir de la ley fundamental de la dinámica la velocidad orbital de un cuerpo, y la relaciona con el radio de la órbita y la masa del cuerpo.
- 5.2. Identifica la hipótesis de la existencia de materia oscura a partir de los datos de rotación de galaxias y la masa del agujero negro central.
- 6.1. Utiliza aplicaciones virtuales interactivas para el estudio de satélites de órbita media (MEO), órbita baja (LEO) y de órbita geoestacionaria (GEO) extrayendo conclusiones.
- 7.1. Describe la dificultad de resolver el movimiento de tres cuerpos sometidos a la interacción gravitatoria mutua utilizando el concepto de caos.



# FILOSOFIA 4º ESO

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 5. Realidad y metafísica	
<p>1. Conocer el significado del término <i>metafísica</i>, comprendiendo que es la principal disciplina de las que componen la Filosofía, identificando su objetivo fundamental, consistente en realizar preguntas radicales sobre la realidad, y entendiendo en qué consiste el <i>preguntar radical</i>.</p> <p>2. Comprender una de las principales respuestas a la pregunta acerca de lo que es; la Naturaleza e identificar esta, no sólo como <i>la esencia</i> de cada ser, sino además como el <i>conjunto de todas las cosas</i> que hay y conocer algunas de las grandes preguntas metafísicas acerca de la Naturaleza: el origen del universo, la finalidad del Universo, cuál es el orden que rige la Naturaleza, si es que lo hay, y el puesto del ser humano en el cosmos, reflexionando sobre las implicaciones filosóficas de cada una de estas cuestiones.</p> <p>3. Conocer las implicaciones filosóficas de la <i>teoría del Caos</i>, comprendiendo la importancia de señalar si la naturaleza se rige por leyes deterministas, o bien, si rige el azar cuántico, y argumentar la propia opinión sobre cómo afecta esta respuesta de cara a la comprensión de la conducta humana.</p> <p>4. Reflexionar sobre la interrogación por el sentido de la existencia, explicando las tesis centrales de algunas teorías filosóficas de la vida, y disertar razonadamente sobre la vida o la muerte, o el devenir histórico, o el lugar del individuo en la realidad, entre otras cuestiones metafísicas.</p>	<p>1.1. Define y utiliza conceptos como metafísica, realidad, pregunta radical, esencia, Naturaleza, cosmos, caos, creación, finalismo, contingente, mecanicismo, determinismo.</p> <p>1.2. Define qué es la metafísica, su objeto de conocimiento y su modo característico de preguntar sobre la realidad.</p> <p>2.1. Expone las dos posibles respuestas a la pregunta por el origen del Universo, es eterno o fue creado, y expone sus reflexiones sobre las implicaciones religiosas y filosóficas de ambas.</p> <p>2.2. Expone las dos posturas sobre la cuestión acerca de si el Universo tiene una finalidad, una dirección, o si no la tiene, y argumenta filosóficamente su opinión al respecto.</p> <p>2.3. Analiza textos cuyo punto de reflexión es la realidad física que nos rodea y los interrogantes filosóficos que suscita.</p> <p>3.1. Define qué es el determinismo y qué es el indeterminismo en el marco de la reflexión sobre si existe un orden en el Universo regido por leyes.</p> <p>4.1. Conoce las tesis centrales del vitalismo de filósofos que reflexionan sobre la vida.</p> <p>4.2. Analiza textos literarios, filosóficos y científicos que versan sobre temas metafísicos como la existencia, la muerte, el devenir histórico o el lugar del individuo en la realidad argumentando, y expone sus propias reflexiones al respecto.</p>

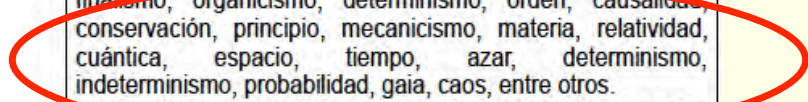


# FILOSOFIA 1º BACHILLERATO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 3. El conocimiento		
<p>El problema filosófico del conocimiento. La verdad.</p> <p>La teoría del conocimiento.</p> <p>Grados y herramientas del conocer: razón, entendimiento, sensibilidad.</p> <p>Racionalidad teórica y práctica.</p> <p>La abstracción.</p> <p>Los problemas implicados en el conocer: sus posibilidades, sus límites, los intereses, lo irracional.</p> <p>La verdad como propiedad de las cosas. La verdad como propiedad del entendimiento: coherencia y adecuación.</p> <p>Algunos modelos filosóficos de explicación del conocimiento y el acceso a la verdad.</p> <p>Filosofía, ciencia y tecnología. La Filosofía de la ciencia.</p> <p>Objetivos e instrumentos de la ciencia.</p> <p>El método hipotético-deductivo.</p> <p>La visión aristotélica del quehacer científico.</p> <p>La investigación científica en la modernidad, matemáticas y técnica como herramientas de conocimiento e interpretación fundamentales.</p> <p>La investigación contemporánea y la reformulación de los conceptos clásicos.</p> <p>Técnica y Tecnología: saber y praxis.</p> <p>Reflexiones filosóficas sobre el desarrollo científico y tecnológico: el problema de la inducción.</p>	<p>1. Conocer de modo claro y ordenado, las problemáticas implicadas en el proceso de conocimiento humano analizadas desde el campo filosófico, sus grados, herramientas y fuentes, explicando por escrito los modelos explicativos del conocimiento más significativos</p> <p>2. Explicar y reflexionar sobre el problema de acceso a la verdad, identificando las problemáticas y las posturas filosóficas que han surgido en torno a su estudio.</p> <p>3. Analizar de forma crítica, fragmentos de textos significativos sobre el análisis filosófico del conocimiento humano, sus elementos, posibilidades y sus límites, valorando los esfuerzos de la filosofía por lograr una aproximación a la verdad alejándose del dogmatismo, la arbitrariedad y los prejuicios.</p> <p>4. Conocer y explicar la función de la ciencia, modelos de explicación, sus características, métodos y tipología del saber científico, exponiendo las diferencias y las coincidencias del ideal y de la investigación científica, con el saber filosófico, como pueda ser la problemática de la objetividad o la adecuación teoría-realidad, argumentando las propias opiniones de forma razonada y coherente.</p> <p>5. Relacionar e identificar las implicaciones de la tecnología, en tanto que saber práctico transformador de la naturaleza y de la realidad humana, reflexionando, desde la filosofía de la tecnología, sobre sus relaciones con la ciencia y con los seres humanos.</p> <p>6. Analizar de forma crítica, fragmentos de textos filosóficos sobre la reflexión filosófica acerca de la ciencia, la técnica y la filosofía, identificando las problemáticas y soluciones propuestas, distinguiendo las tesis principales, el orden de la argumentación, relacionando los problemas planteados en los textos con lo estudiado en la unidad y razonando la propia postura.</p> <p>7. Entender y valorar la interrelación entre la filosofía y la ciencia.</p>	<p>1.1. Identifica y expresa, de forma clara y razonada, los elementos y las problemáticas que conlleva el proceso del conocimiento de la realidad, como es el de sus grados, sus posibilidades y sus límites.</p> <p>2.1. Conoce y explica diferentes teorías acerca del conocimiento y la verdad como son el idealismo, el realismo, el racionalismo, el empirismo, el perspectivismo, el consenso o el escepticismo, contrastando semejanzas y diferencias entre los conceptos clave que manejan.</p> <p>2.2. Explica y contrasta diferentes criterios y teorías sobre la verdad tanto en el plano metafísico como en el gnoseológico, utilizando con rigor términos como gnoseología, razón, sentidos, abstracción, objetividad, certeza, duda, evidencia, escepticismo, autoridad, probabilidad, prejuicio, coherencia o adecuación, consenso, incertidumbre, interés e irracional entre otros, construyendo un glosario de conceptos de forma colaborativa, usando internet.</p> <p>3.1. Analiza fragmentos de textos breves de Descartes, Hume, Kant, Nietzsche, Ortega y Gasset, Habermas, Popper, Kuhn o Michel Serres, entre otros.</p> <p>4.1. Explica los objetivos, funciones y principales elementos de la ciencia manejando términos como hecho, hipótesis, ley, teoría y modelo.</p> <p>4.2. Construye una hipótesis científica, identifica sus elementos y razona el orden lógico del proceso de conocimiento.</p> <p>4.3. Utiliza con rigor, términos epistemológicos como inducción, hipotético-deductivo, método, verificación, predicción, realismo, causalidad, objetividad, relatividad, caos e indeterminismo, entre otros.</p> <p>5.1. Extrae conclusiones razonadas sobre la inquietud humana por transformar y dominar la naturaleza poniéndola al servicio del ser humano así, como, de las consecuencias de esta actuación y participa en debates acerca de las implicaciones de la tecnología en la realidad social.</p> <p>6.1. Analiza fragmentos de textos breves y significativos de pensadores como Aristóteles, Popper, Kuhn, B. Russell, A. F. Chalmers o J. C. García Borrón, entre otros.</p> <p>7.1. Identifica y reflexiona de forma argumentada acerca de problemas comunes al campo filosófico y científico como son el problema de los límites y posibilidades del conocimiento, la cuestión de la objetividad y la verdad, la racionalidad tecnológica, etc.</p> <p>7.2. Investiga y selecciona información en internet, procedente de fuentes solventes, sobre las problemáticas citadas y realiza un proyecto de grupo sobre alguna temática que profundice en la interrelación entre la filosofía y la ciencia.</p>

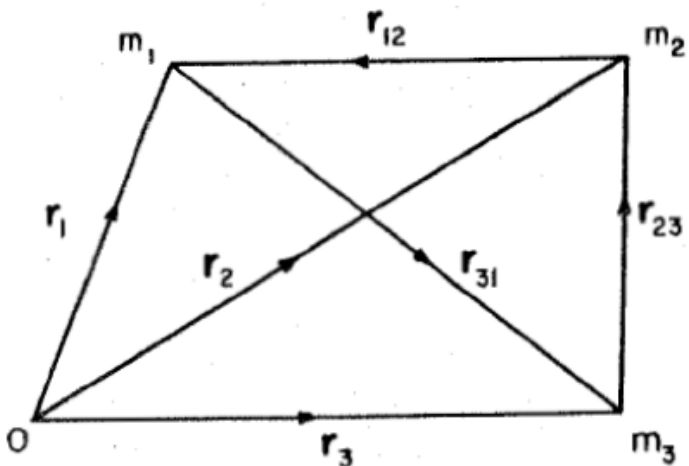


Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. La realidad		
<p>La explicación metafísica de la realidad.</p> <p>La metafísica como explicación teórica de la realidad.</p> <p>La pregunta por el ser como punto de partida de la Filosofía. Platón versus Aristóteles.</p> <p>La interrogación metafísica sobre la verdadera realidad: el problema apariencia y realidad.</p> <p>La pregunta por el origen y estructura de lo real.</p> <p>La caracterización de la realidad: el cambio o la permanencia, el sustancialismo estático frente al devenir. Esencialismo y existencialismo.</p> <p>La necesidad de categorizar racionalmente lo real.</p> <p>Las cosmovisiones científicas sobre el universo. La filosofía de la naturaleza.</p> <p>La admiración filosófica por la Naturaleza o Filosofía de la naturaleza.</p> <p>El paradigma cualitativo organicista: el Universo aristotélico.</p> <p>El Universo máquina: la visión mecanicista en la Modernidad. Supuestos epistemológicos del modelo heliocéntrico: La búsqueda de las leyes universales de un Universo infinito. Determinismo, regularidad, conservación, economía y continuidad.</p> <p>La visión contemporánea del Universo.</p> <p>El reencuentro de la Filosofía y la Física en la Teoría del Caos.</p>	<p>1. Reconocer y valorar la metafísica, disciplina filosófica que estudia la realidad en tanto que totalidad, distinguiéndola de las ciencias que versan sobre aspectos particulares de la misma.</p> <p>2. Conocer y explicar, desde un enfoque metafísico, los principales problemas que plantea la realidad.</p> <p>3. Conocer y comparar las explicaciones dadas desde las grandes cosmovisiones sobre el universo.</p> <p>4. Elaborar tablas y/o mapas conceptuales comparando los diferentes caracteres adjudicados históricamente al Universo, entendido como totalidad de lo real, contextualizando histórica y culturalmente cada cosmovisión y ampliando información mediante internet y/o fuentes bibliográficas.</p> <p>5. Leer y analizar de forma crítica, textos filosóficos, epistemológicos y científicos sobre la comprensión e interpretación de la realidad, tanto desde el plano metafísico como físico, utilizando con precisión los términos técnicos estudiados, relacionando los problemas planteados en los textos con lo estudiado en las unidades y razonando la propia postura.</p>	<p>1.1. Conoce qué es la metafísica y utiliza la abstracción para comprender sus contenidos y actividad, razonando sobre los mismos.</p> <p>2.1. Describe las principales interpretaciones metafísicas y los problemas que suscita el conocimiento metafísico de la realidad.</p> <p>2.2. Comprende y utiliza con rigor conceptos metafísicos como ser, sistema metafísico, realidad, apariencia, materia y espíritu, unidad, dualidad, multiplicidad, devenir, necesidad, contingencia, trascendencia, categoría y abstracción, materialismo, espiritualismo, existencialismo o esencialismo, entre otros.</p> <p>2.3. Realiza un análisis crítico ante teorías metafísicas divergentes de interpretación de la realidad.</p> <p>2.4. Analiza y comprende fragmentos de textos breves y significativos sobre las problemáticas metafísicas que plantea la realidad, de pensadores como Platón, Aristóteles, Tomás de Aquino, Descartes, Marx, Nietzsche, entre otros, comparando y estableciendo semejanzas y diferencias entre los distintos enfoques y disertando de forma coherente sobre las distintas posturas históricas.</p> <p>3.1. Explica y compara dos de las grandes cosmovisiones del Universo: el paradigma organicista aristotélico y el modelo mecanicista newtoniano.</p> <p>3.2. Describe los caracteres esenciales de la interpretación de la realidad relativista, y cuántica contemporánea, explicando las implicaciones filosóficas asociadas a ellos.</p> <p>3.3. Utiliza con rigor términos epistemológicos y científicos como: cosmovisión, paradigma, Universo, naturaleza, finalismo, organicismo, determinismo, orden, causalidad, conservación, principio, mecanicismo, materia, relatividad, cuántica, espacio, tiempo, azar, determinismo, indeterminismo, probabilidad, gaia, caos, entre otros.</p> <p>4.1. Elabora esquemas, tablas y/o mapas conceptuales comparando los diferentes caracteres adjudicados históricamente al Universo, entendido como totalidad de lo real, contextualizando histórica y culturalmente cada cosmovisión y ampliando información mediante internet y/o fuentes bibliográficas.</p> <p>5.1. Analiza textos filosóficos y científicos, clásicos y contemporáneos, que aborden las mismas problemáticas, investigando la vigencia de las ideas expuestas.</p> <p>5.2. Reflexiona, argumentando de forma razonada y creativa sus propias ideas, sobre las implicaciones filosóficas que afectan a la visión del ser humano, en cada una de las cosmovisiones filosófico-científicas estudiadas.</p>



# PROBLEMA GENERAL DE LOS TRES CUERPOS

- Sean 3 cuerpos de masas arbitrarias  $m_i$  que se atraen mutuamente mediante la ley de gravitación de Newton. Asumiendo que pueden moverse libremente en el espacio tridimensional y con condiciones iniciales arbitrarias.
- Problema: **Determinar la evolución del movimiento.**

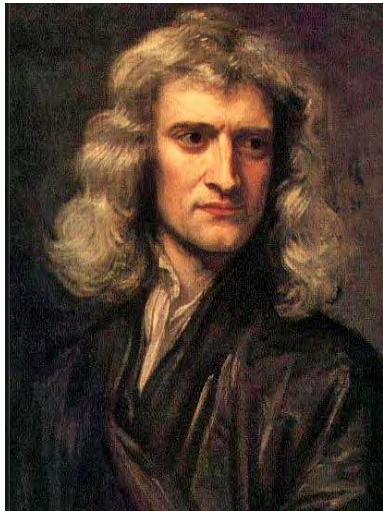


$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -k^2 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + k^2 m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -k^2 m_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} + k^2 m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -k^2 m_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} + k^2 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3}.$$





Newton



Clairaut



Euler



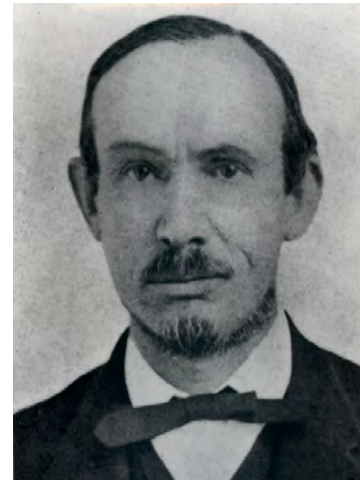
Laplace



Lagrange



Jacobi



Hill



Poincaré



SUR LE  
PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES  
ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR  
H. POINCARÉ  
A PARIS.

---

MÉMOIRE COURONNÉ  
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II  
LE 21 JANVIER 1889.

---

AVEC DES NOTES  
PAR L'AUTEUR.

SUR LE  
PROBLÈME DES TROIS CORPS

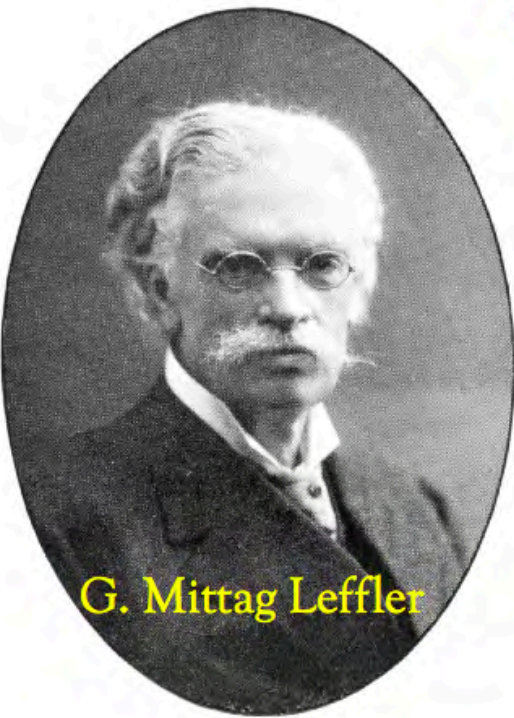
ET LES  
ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR  
H. POINCARÉ  
A PARIS.

---

MÉMOIRE COURONNÉ  
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II  
LE 21 JANVIER 1889.

# The King and his jury



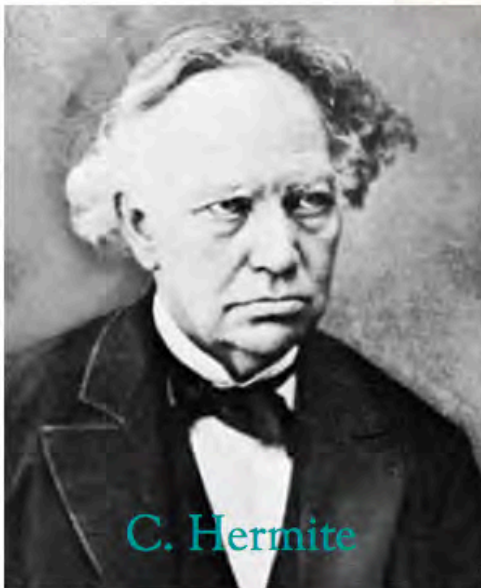
G. Mittag Leffler



King Oscar II



K. Weierstrass



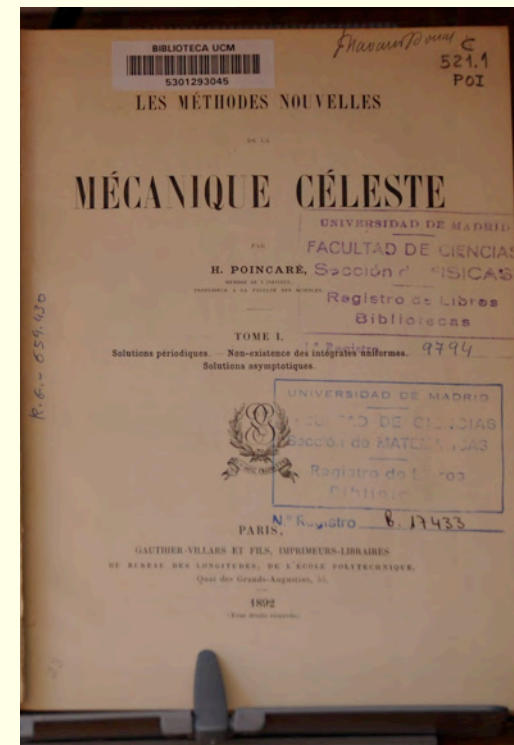
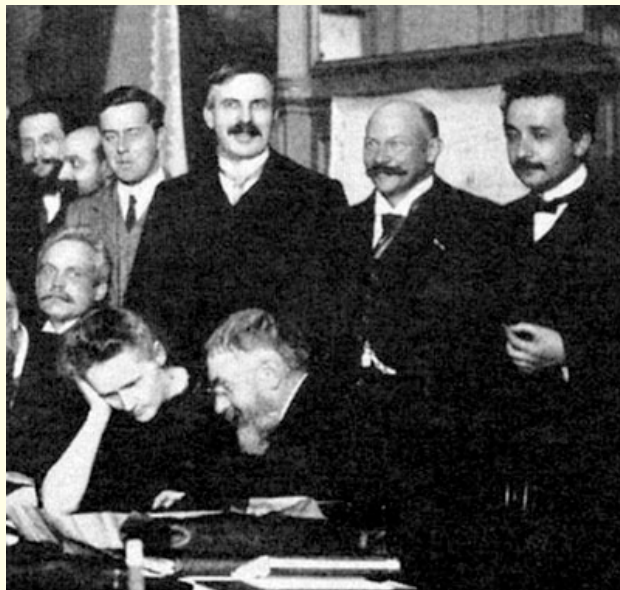
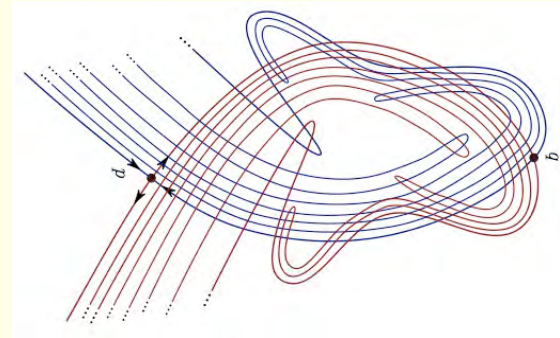
C. Hermite



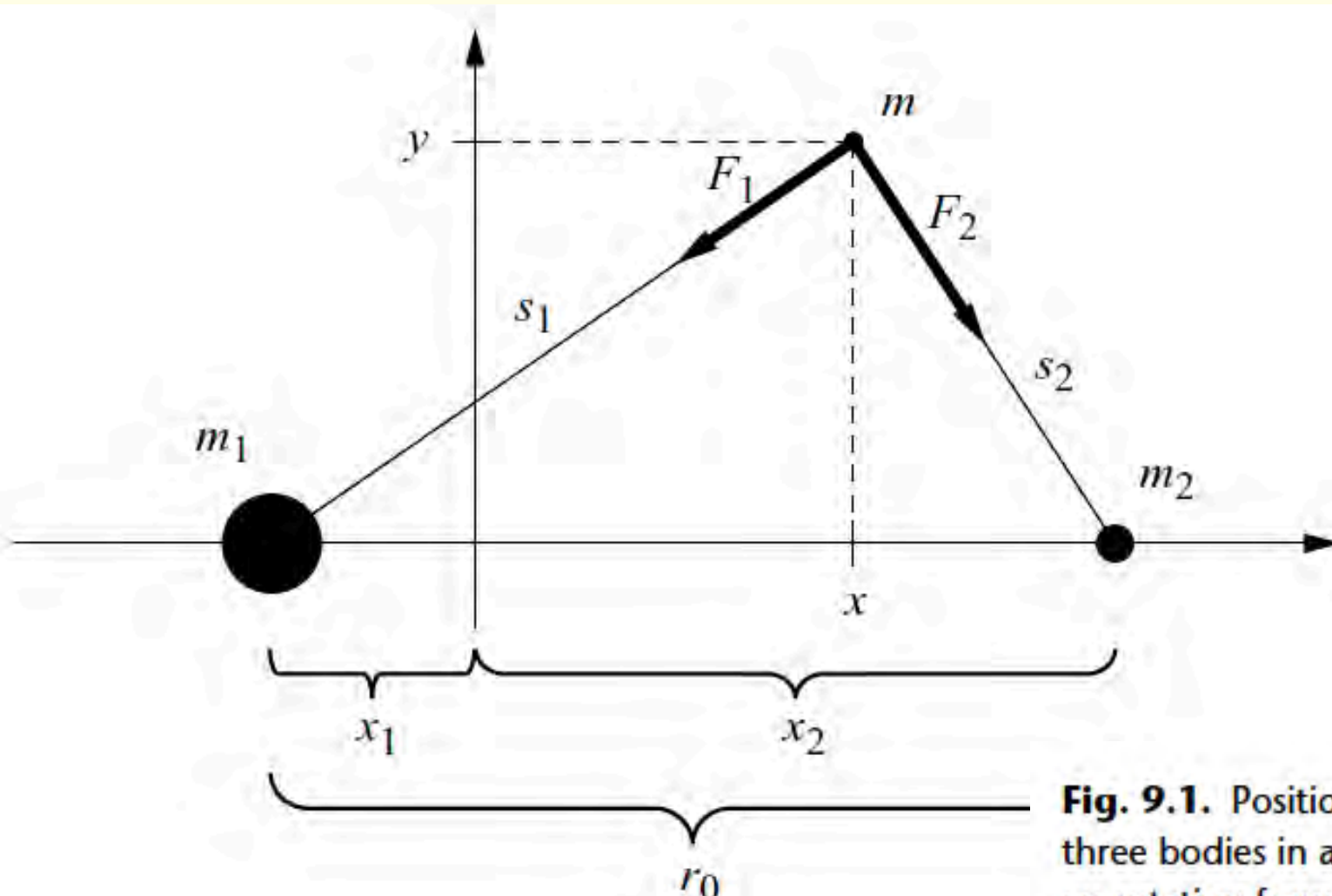
S. Kovalevskaja



# Jules Henri Poincaré (1854-1912)



# PROBLEMA DE LOS 3 CUERPOS CIRCULAR, RESTRINGIDO Y PLANO



**Fig. 9.1.** Positions of the three bodies in a co-rotating frame.



# ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LA MASA LIGERA

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{\mu_1(x + \mu_2)}{s_1^3} - \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{s_2^3}, \quad (9.3)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{\mu_1 y}{s_1^3} - \frac{\mu_2 y}{s_2^3}. \quad (9.4)$$

$$\ddot{x} = 2\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (9.5)$$

$$V(x, y) = -\frac{\mu_1}{s_1} - \frac{\mu_2}{s_2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2. \quad (9.6)$$

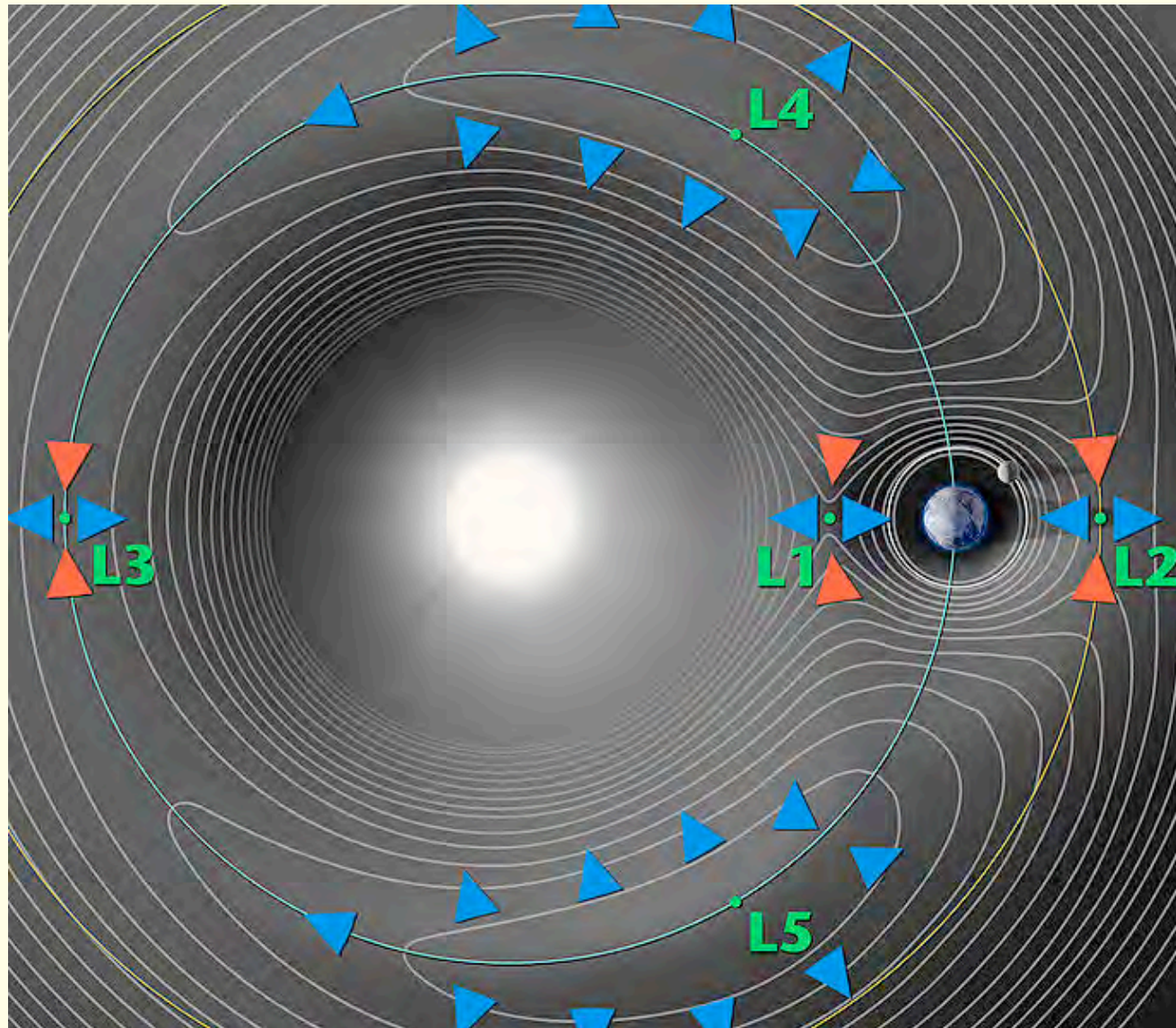
# POTENCIAL DEL PROBLEMA



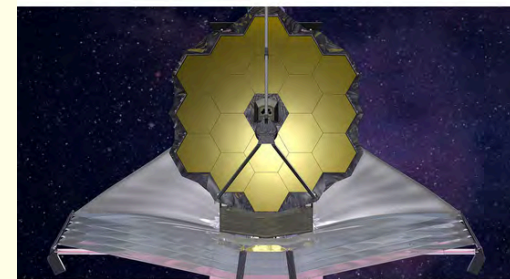
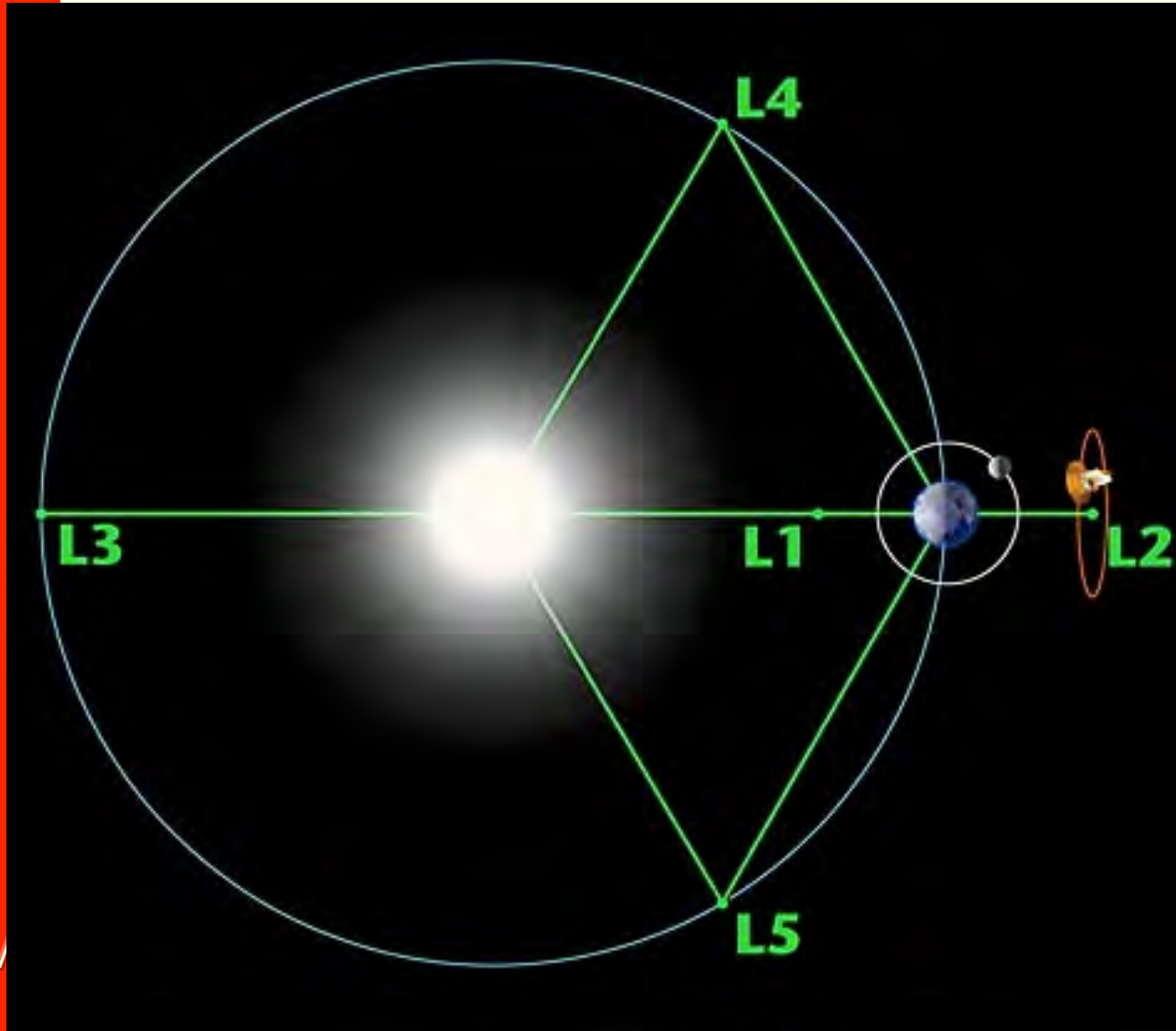
**Fig. 9.3.** Potential,  $V(x, y)$ , of the three-body problem ( $\mu_2 = 10^{-1}$ ,  $|x|, |y| \leq 1.5$  and the potential difference of the black and white bands is  $\Delta V = 0.05$ ). The large celestial bodies are in the wells, which are of infinite depth. The saddle points of the landscape corresponding to the unstable Lagrange points  $L_1$ ,  $L_2$  and  $L_3$  are marked by crosses. The Lagrange points  $L_4$  and  $L_5$  (black dots) are located in the ellipsoidal regions of the two hill-tops (they would become stable for  $\mu_2 \leq 0.039$  only).



# CURVAS EQUIPOTENCIALES Y PUNTOS DE LAGRANGE



# PUNTOS DE LAGRANGE



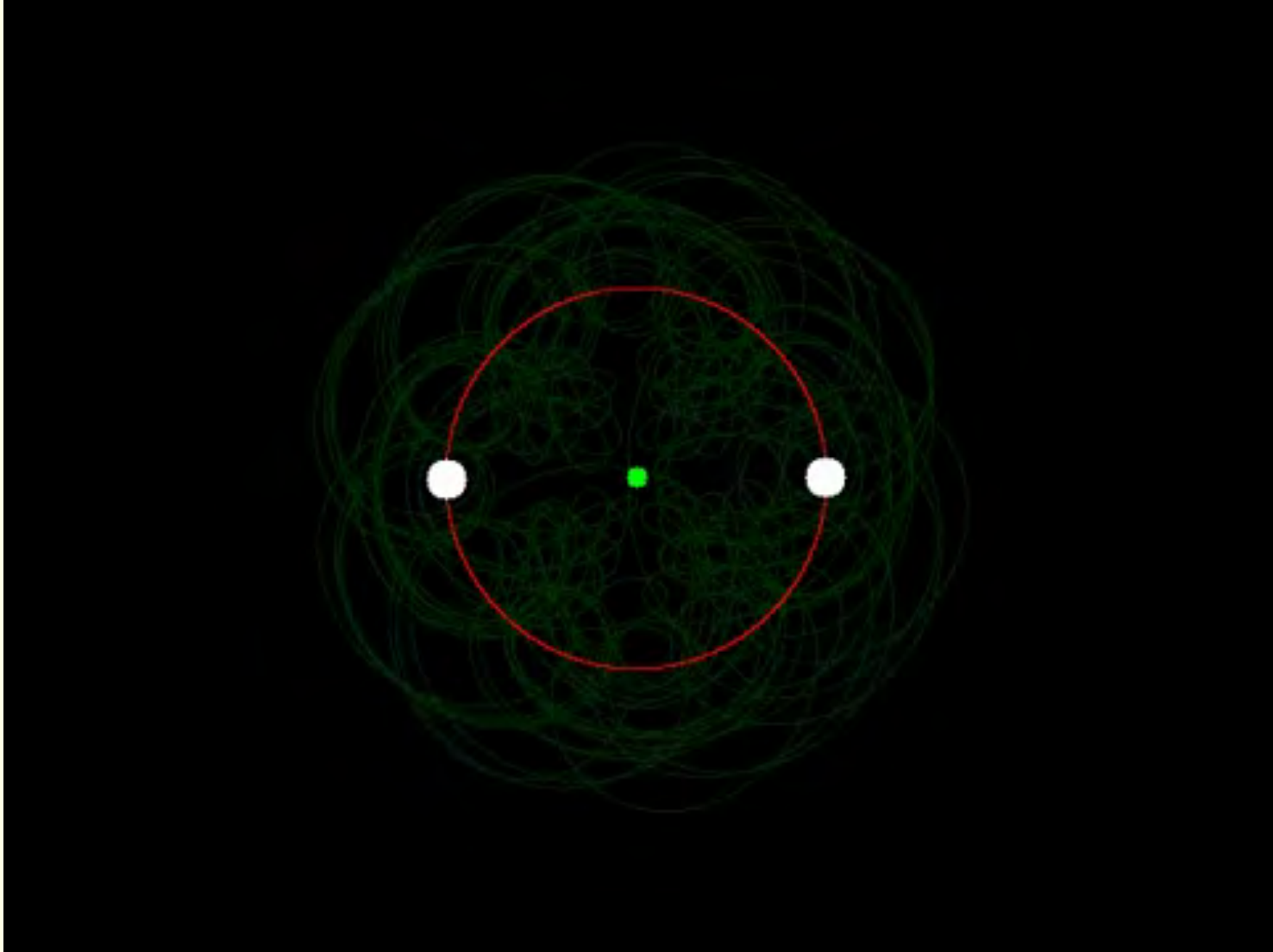
The James Webb Space Telescope

# ERUPCION SOLAR

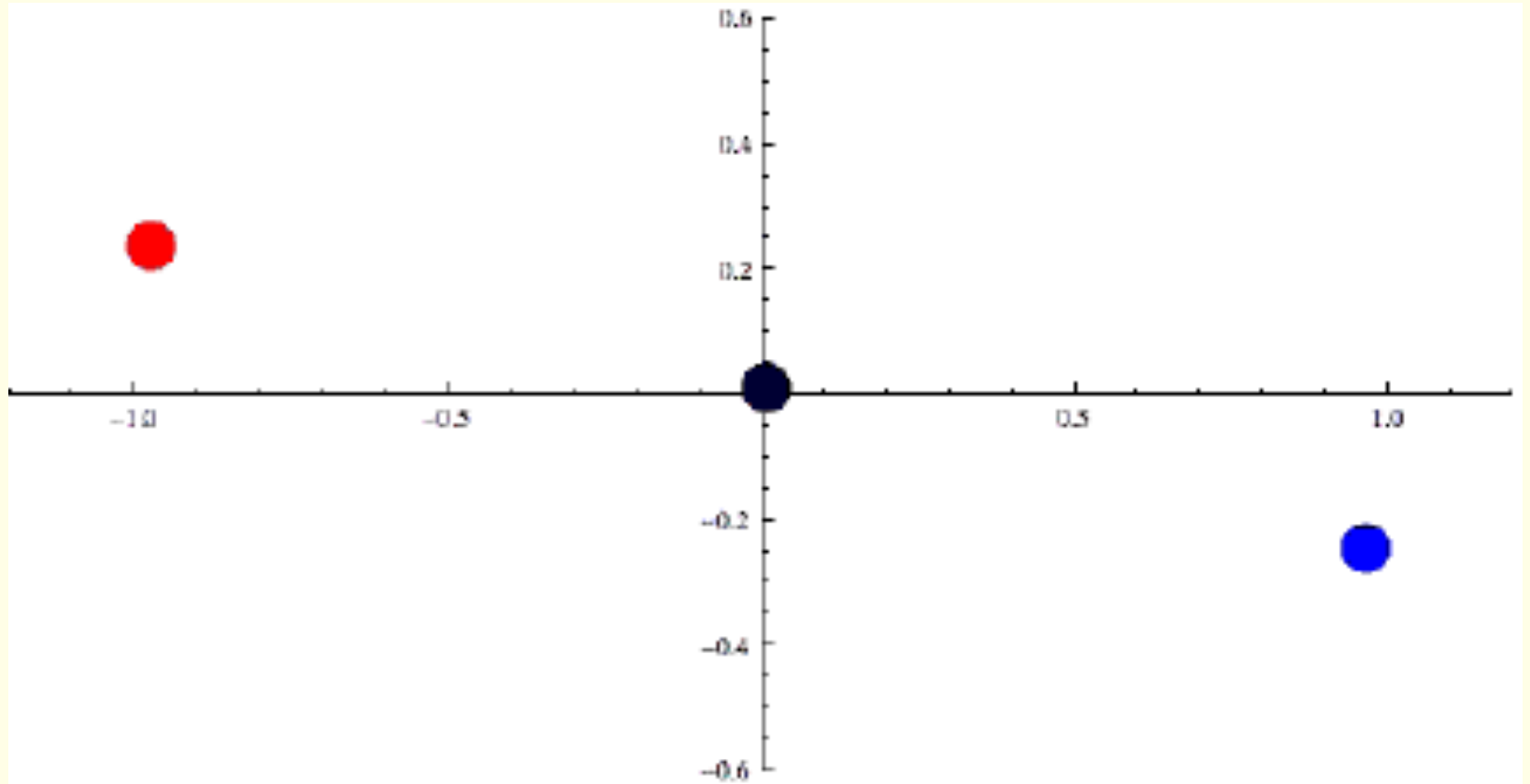




# ANIMACION DE MOVIMIENTO DE TRES CUERPOS



# ORBITA EN FORMA DE OCHO



# JUNIO 2015: Hubble observes chaotic dance of Pluto's moons

## Pluto's moons





# IDEAS BÁSICAS EN DINÁMICA NO LINEAL

- **Caos, Fractales y Dinámica:** Interdisciplinariedad
- **Dinámica:** La ciencia que estudia el movimiento de los sistemas, es decir, su evolución con el tiempo
  - Equilibrio
  - Movimiento periódico y cuasiperiódico
  - Movimientos complejos
- **Sistemas dinámicos** se encuentran en:
  - Mecánica e Ingeniería Mecánica
  - Ingeniería Química y Cinética Química
  - Ecología y dinámica de poblaciones biológicas
  - Tecnologías de las comunicaciones
  - Economía, etc.
  - Virtualmente en cualquier campo de la física, o de las ciencias, donde exista algún tipo de movimiento en sentido amplio
- **La Dinámica No Lineal** es realmente **interdisciplinar**, ya que trata acerca de muchos fenómenos diferentes que evolucionan con el tiempo

- **PROPORCIONALIDAD:** pequeñas causas provocan pequeños efectos
- **ADITIVIDAD:** el todo es igual a la suma de las partes
- **REPLICACION:** la misma acción en las mismas condiciones producen el mismo resultado
- **RELACIONES CLARAS ENTRE CAUSA Y EFECTO.** Si conoces un poco acerca de su comportamiento, conoces mucho.

# NO LINEALIDAD Y CAOS

- **NO HAY PROPORCIONALIDAD:** Pequeñas causas pueden provocar grandes efectos.
- **EMERGENCIA:** NO EXISTE LA ADITIVIDAD: EL TODO ES MAYOR QUE LA SUMA DE LAS PARTES
- **DEPENDENCIA SENSIBLE A LAS CONDICIONES INICIALES.** LO QUE PUEDE LLEVAR A QUE NUNCA PUEDA REPRODUCIRSE DE MODO EXACTO EL MISMO EXPERIMENTO.
- **LA NO LINEALIDAD PUEDE GENERAR INESTABILIDADES, DISCONTINUIDADES, IMPREDECIBILIDAD. LO QUE HACE NECESARIO LA FLEXIBILIDAD, ADAPTABILIDAD, CAMBIO DINAMICO, INNOVACIÓN, CAPACIDAD DE REACCIÓN.**



# POR CULPA DE UN CLAVO...



## Por culpa de un clavo...

Por culpa de un clavo, se pierde la herradura,  
Por culpa de la herradura se pierde el caballo,  
Por culpa del caballo, se pierde el jinete,  
Por culpa del jinete, se pierde el mensaje,  
Por culpa del mensaje, se pierde la batalla,  
Por culpa de la batalla, se pierde el Reino.  
Los mas minimo la puede cambiar todo



## 1.4 Definition of chaos; summary

Chaos is a motion, a temporal dynamics of *simple* systems that can be described in terms of a few variables. Such motion is:

- irregular in time (it is not even the superposition of periodic motions, it is really aperiodic);
- unpredictable in the long term and sensitive to initial conditions;
- complex, but ordered, in the phase space: it is associated with a fractal structure.

Table 1.1. *Comparison of regular and chaotic motion.*

Regular motion	Chaotic motion
self-repeating	irregular
predictable	unpredictable
of simple geometry	of complicated geometry



Table 1.3. *Basic types of chaos and related phenomena and sets.*

	Permanent chaos	Transient chaos
Dissipative	motion on chaotic attractors	chaotic transients towards attractors, fractal basin boundaries (chaotic saddles)
Conservative	motion in chaotic bands	chaotic scattering (chaotic saddles)

# Algunos ejemplos de sistemas caóticos

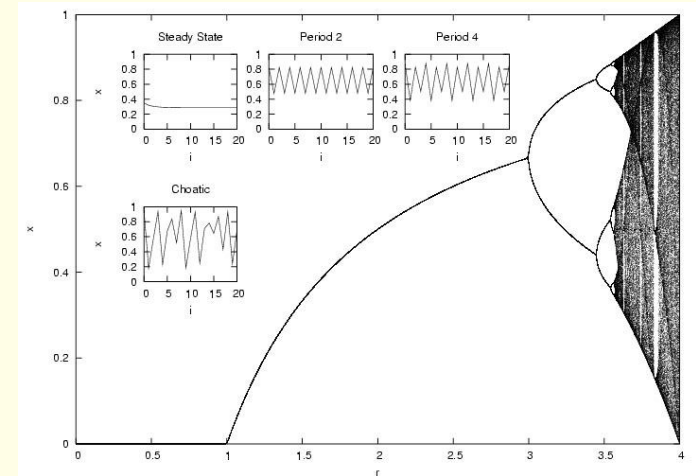
## ● SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

## ● SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \frac{g}{l} \sin x = F \cos \omega t$$

## ● CHAOS FOR JAVA

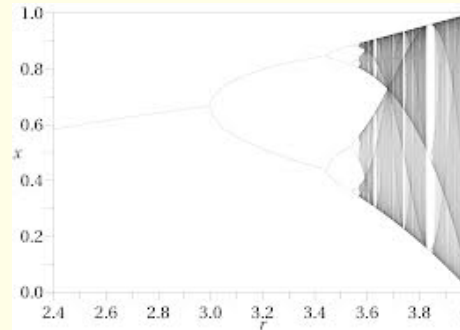


# El Prof. James A Yorke nos muestra un péndulo doble

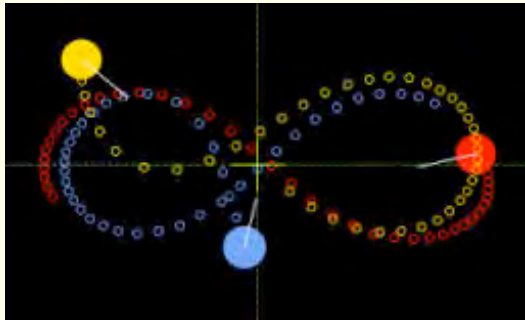




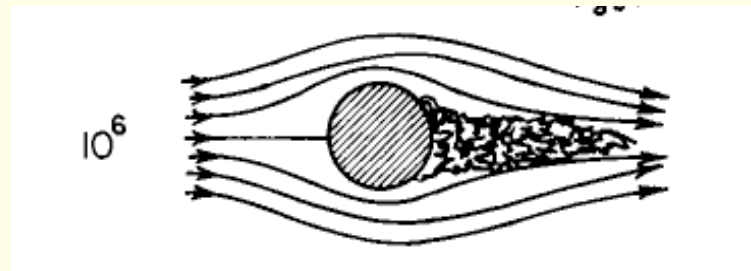
# Diferentes caminos que llevan al caos



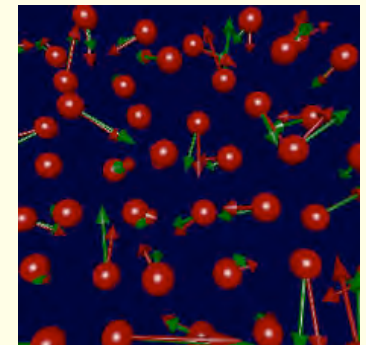
Aplicación Logística



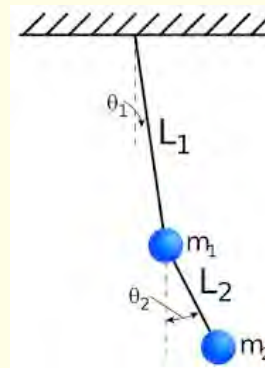
Problema de 3 cuerpos  
y Mecánica Celeste



Turbulencia y  
Dinámica de Fluidos



Irreversibilidad y  
Mecánica Estadística

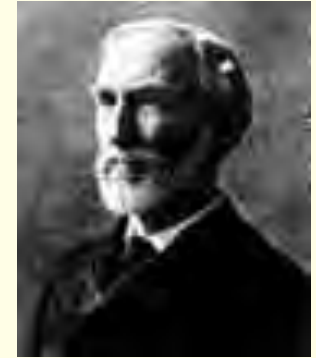


Osciladores No Lineales

# James Clerk Maxwell (1831-1879)



L Boltzmann (1844-1906)



Josiah W Gibbs (1839-1903)

De uno de sus escritos: *Does the progress of Physical Science tend to give any advantage to the opinion of Necessity (or Determinism) over that of the Contingency of Events and the Freedom of the Will?* de una conferencia dada en Cambridge, el 11 de febrero de 1873 son las siguientes extractos que muestran hasta qué punto James Clerk Maxwell era conocedor de lo que hoy llamamos dependencia sensible a las condiciones iniciales, que es la huella del caos en un sistema físico.

*"Cuando el estado de las cosas es tal que una variación infinitamente pequeña del estado presente altera solo una cantidad inifinitamente pequeña el estado del futuro, que la condición del sistema, esté en reposo o en movimiento, se dice estable; pero cuando una variación infinitamente pequeña del estado presente aporta una diferencia finita en el estado del sistema en un tiempo finito, la condición del sistema se dice inestable. Es claro que la existencia de condiciones inestables hace imposible la predicción de futuros eventos, si nuestro conocimiento del estado presente es solo aproximado y no exacto. "*

# Aleksander M. Lyapunov (1857- 1918)

A. LIAPOUNOFF

Problème général de la stabilité du mouvement

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série, tome 9 (1907), p. 203-474.*

PROBLÈME GÉNÉRAL  
DE  
LA STABILITÉ DU MOUVEMENT,

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

Traduit du russe par M. Édouard DAVAUX,  
Ingénieur de la Marine à Toulon <sup>(1)</sup>.

PRÉFACE.

Dans cet Ouvrage sont exposées quelques méthodes pour la résolution des questions concernant les propriétés du mouvement et, en particulier, de l'équilibre, qui sont connues sous les dénominations de *stabilité* et d'*instabilité*.

Les questions ordinaires de ce genre, auxquelles est consacré cet Ouvrage, conduisent à l'étude d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

dont les seconds membres, dépendant du temps  $t$  et des fonctions inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $t$ , se développent, tant que les  $x_i$  sont assez petits en valeurs absolues, en séries suivant les puissances entières et positives des  $x_i$ , et s'annulent quand toutes ces variables sont égales à zéro.

Le problème revient à savoir s'il est possible de choisir les valeurs initiales des



<sup>(1)</sup> M. Liapounoff a très gracieusement autorisé la publication en langue française de son Mémoire : ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОБЪ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИИ imprimé en 1892 par la Société mathématique de Kharkow. La traduction a été revue et corrigée par l'auteur, qui y a ajouté une Note rédigée d'après un Article paru en 1893 dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkow*.



# El camino de los OSCILADORES



**1739** Leonhard Euler

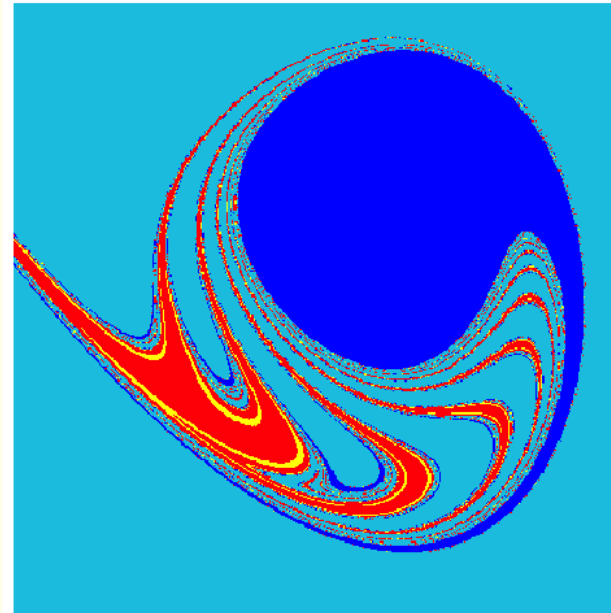
Resuelve la ecuación del oscilador armónico y se da cuenta del fenómeno de la **RESONANCIA**

$$mx'' + bx' + kx = f(t)$$

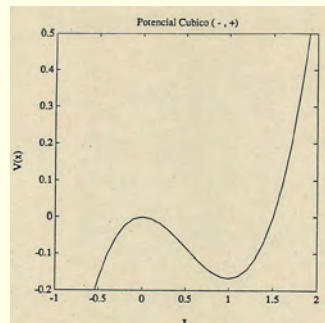
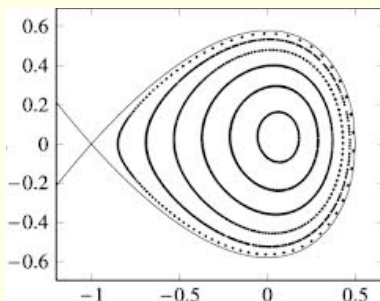
# Oscilador de Helmholtz



1863

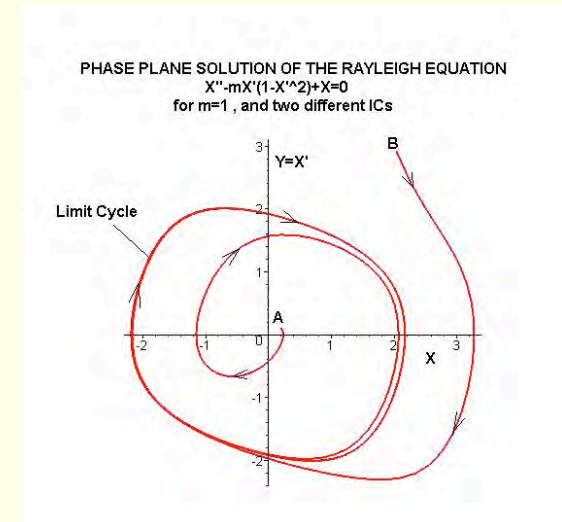
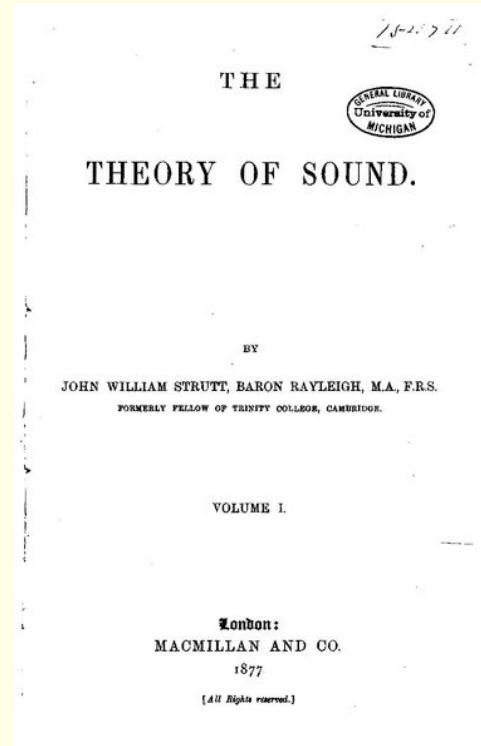


Hermann L. F. von  
Helmholtz (1821 - 1894)



$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} - x + x^2 = F \cos t$$

# John William Strutt, Lord Rayleigh(1842-1919)

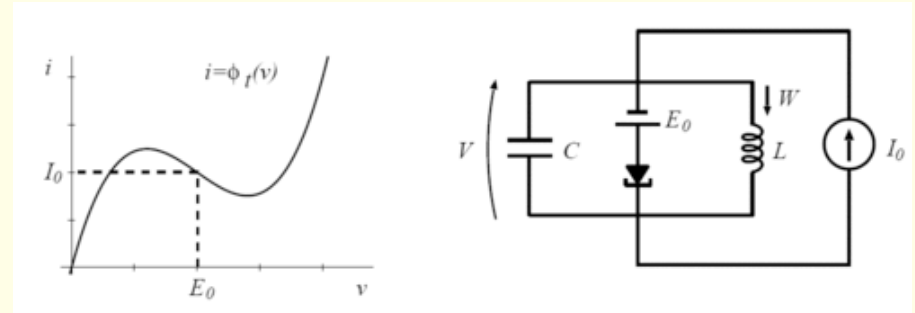


*“On Maintained Oscillations,” Phil. Mag., Vol. 15, p. 229, 1883*

$$\ddot{x} + \mu(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + Kx = 0.$$

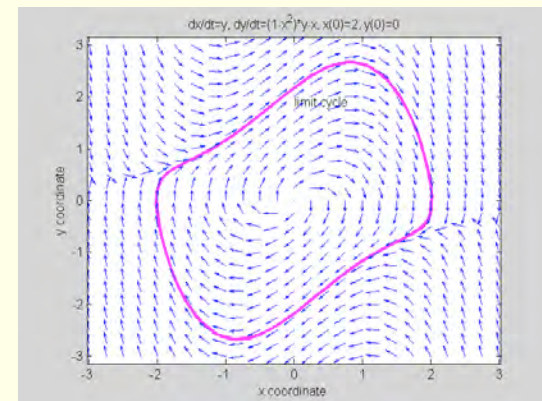


# Balthasar van der Pol (1889 - 1959)

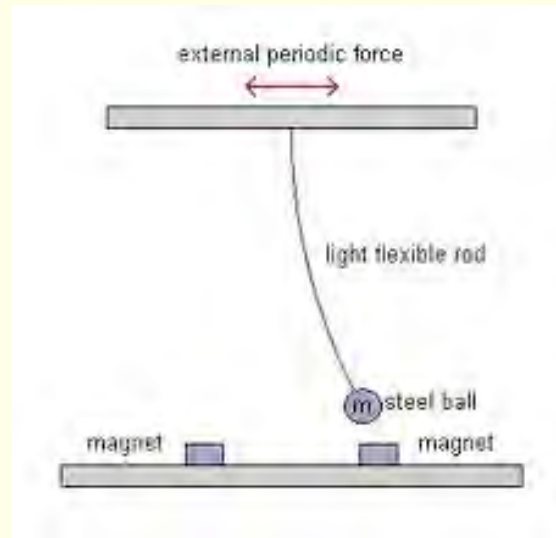


$$\ddot{V} - \frac{1}{C} (\alpha - 3\gamma V^2) \dot{V} + \frac{1}{LC} V = 0$$

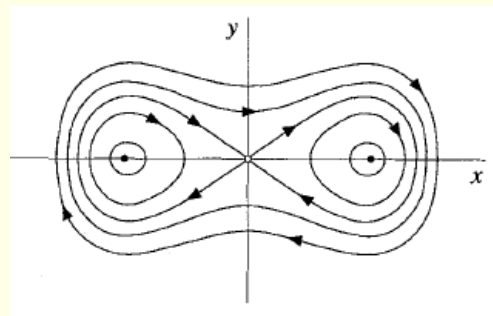
$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$



# Georg Duffing (1861-1944)



G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.



$\alpha > 0$	$\delta = 0$	$\delta > 0$
$\beta > 0$		
$\beta < 0$		

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t ,$$

# Aleksandr Andronov (1901-1952) y la Escuela Rusa de Sistemas Dinámicos



## THEORY OF OSCILLATIONS

By A. A. ANDRONOV  
and C. E. CHAIKIN

English Language Edition  
Edited under the direction of  
SOLOMON LEFSCHETZ

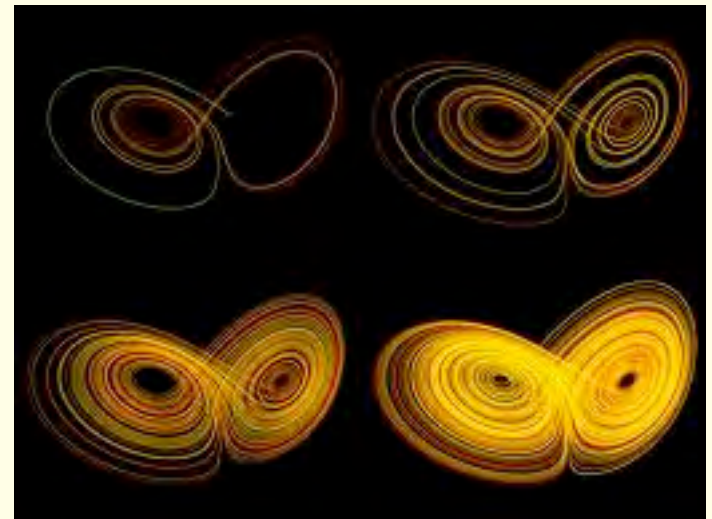
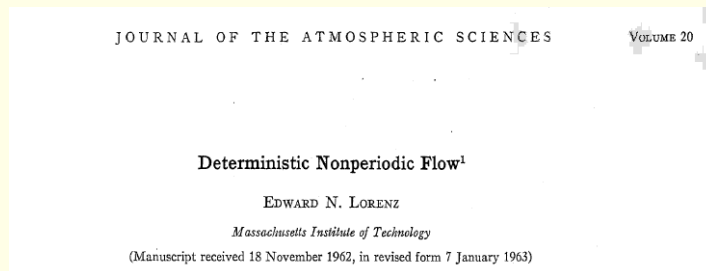
1949  
PRINCETON UNIVERSITY PRESS  
PRINCETON, NEW JERSEY



# Edward Lorenz (1917-2008) y el famoso atractor de Lorenz



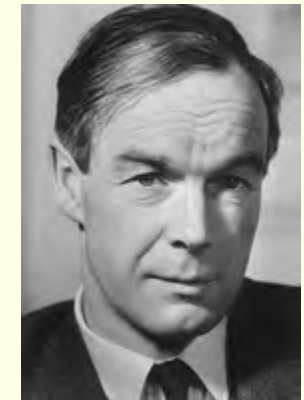
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$



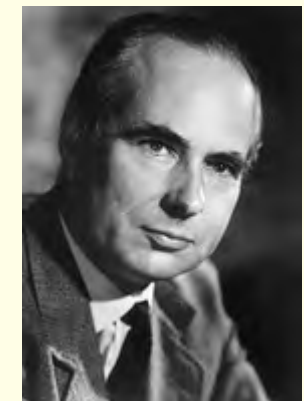
# Ecuaciones de Hodgkin-Huxley. Premio Nobel 1963

## Hodgkin-Huxley equations

$$\begin{aligned}
 C_m \frac{dV}{dt} &= -g_L(V - V_L) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) \\
 \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m \\
 \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h \\
 \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n
 \end{aligned}$$



Sir Alan L. Hodgkin  
(1914-1998)



Sir Andrew F. Huxley  
(1917-2012)

Attractors	Dynamics	Trajectories in State Space	Time Series	Topological Structure	Dimension	Lyapunov Spectrum	Poincare Section
Equilibrium Point	Static			Point	0	$\lambda_i < 0$	
Limit Cycle	Periodic			$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_i < 0$ ( $i \neq 1$ )	
Torus	Quasi-Periodic			$\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$	k	$\lambda_1 = 0$ ( $i=1, 2, \dots, k$ ) $\lambda_i < 0$ (otherwise)	
Strange Attractor	Chaotic			Fractal	Real Number	$\lambda_1 > 0$ ( $i=1, 2, \dots, n$ ) $\lambda_1 = 0$ ( $i=n+1, \dots, m$ ) $\lambda_i < 0$ (otherwise)	

# Pierre François Verhulst (1804-1849)



MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE. 113

Tous les faits ont concouru à démontrer l'existence d'un mouvement convergent de toutes les directions vers le centre de la trombe, en même temps que celle d'un mouvement en haut vers le milieu. L'auteur, passant en revue les opinions des physiciens sur l'origine des trombes, croit être le premier qui, en attribuant à l'électricité, ait donné une idée du mode spécial d'action de ce puissant agni dans ce terrible phénomène. (*American Journal*, avril 1837, et *Bibliothèque universelle*, septembre 1837).

Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, par P.-F. VERHULST.

On sait que le célèbre Malthus a établi comme principe que la population humaine tend à croître en progression géométrique, de manière à se doubler après une certaine période, par exemple, tous les vingt-cinq ans. Cette proposition est incontestable, si l'on fait abstraction de la difficulté toujours croissante de se procurer des subsistances lorsque la population a acquis un certain degré d'agglomération, ou des ressources que la population puise dans son accroissement, même lorsque la société est encore naissante, telles qu'une plus grande division du travail, l'existence d'un gouvernement régulier et de moyens de défense qui assurent la tranquillité publique, etc.

En effet, toutes choses égales d'ailleurs, si mille âmes sont devenues deux mille après vingt-cinq ans, ces deux mille deviendront quatre mille après le même laps de temps.

Dans nos vieilles sociétés européennes, où les bonnes terres sont cultivées depuis long-temps, le travail employé à bonifier un terrain déjà en culture, ne peut ajouter à ses produits que des quantités sans cesse décroissantes; en admettant que, dans les premiers vingt-cinq ans, on ait doublé le produit du sol, dans la seconde période à peine parviendra-t-on peut-être à lui faire produire un tiers en sus. L'accroissement virtuel de la population trouve donc une limite dans l'étendue et la fertilité du pays, et la population tend, par conséquent, de plus en plus à devenir stationnaire.

Stepwise logistic curve

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 \rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

Iterative change

$$N' = \left( N + \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \Delta t \right) = (1 + \alpha \cdot \Delta t) N - (\beta \cdot \Delta t) N^2$$

$$N' = (1 + \alpha \cdot \Delta t) N \left[ 1 - \frac{\beta \cdot \Delta t}{1 + \alpha \cdot \Delta t} N \right]$$

$$\underbrace{\alpha \cdot \Delta t}_{\propto x'} \underbrace{N}_{\propto x} \underbrace{\left[ 1 - \frac{\beta \cdot \Delta t}{1 + \alpha \cdot \Delta t} N \right]}_x$$

$$x_{N+1} = A x_N (1 - x_N)$$

"Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement". Corresp.

Math. Phys., 10, 113-121,

1838

## Period Three Implies Chaos

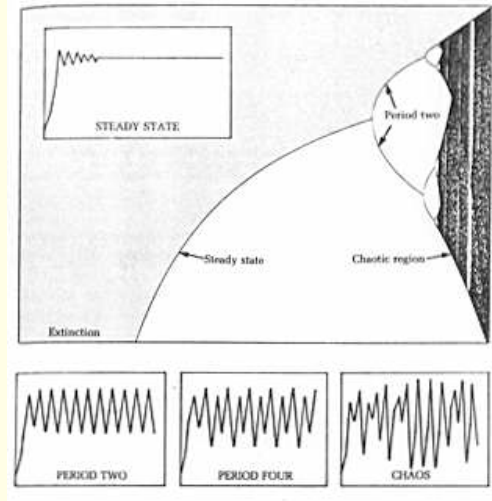
Tien-Yien Li; James A. Yorke

*The American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 10. (Dec., 1975), pp. 985-992.





# Lord Robert May of Oxford n. 1938



$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n (1 - x_n)$$

## Simple mathematical models with very complicated dynamics

Robert M. May\*

*First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.*

Nature **261** 459–67 (1976)

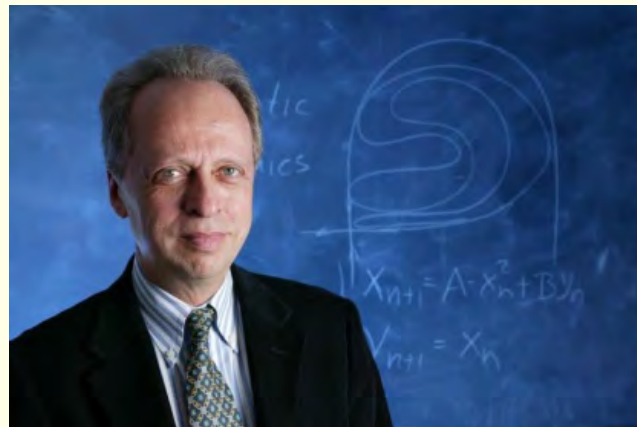
# EL GRUPO DE CAOS DE LA UNIVERSIDAD DE MARYLAND



Ed Ott



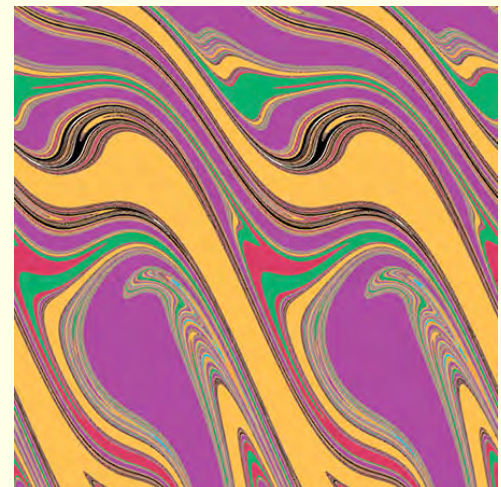
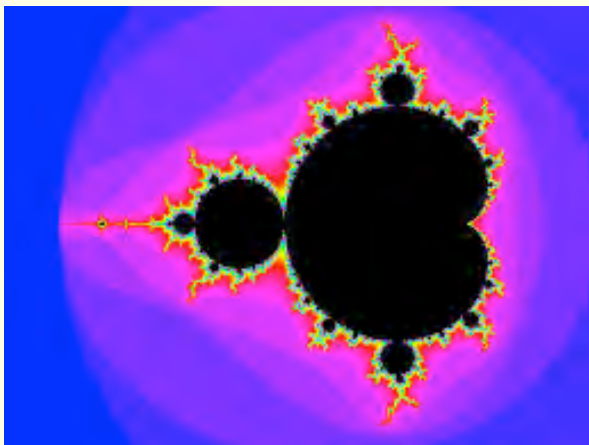
Jim Yorke



Celso Grebogi

- Control del caos
- Estructuras fractales
- Caos transitorio
- Cuencas de Wada
- Desarrollos básicos en DNL
- Etc...

# Japan Prize 2003 sobre Complejidad





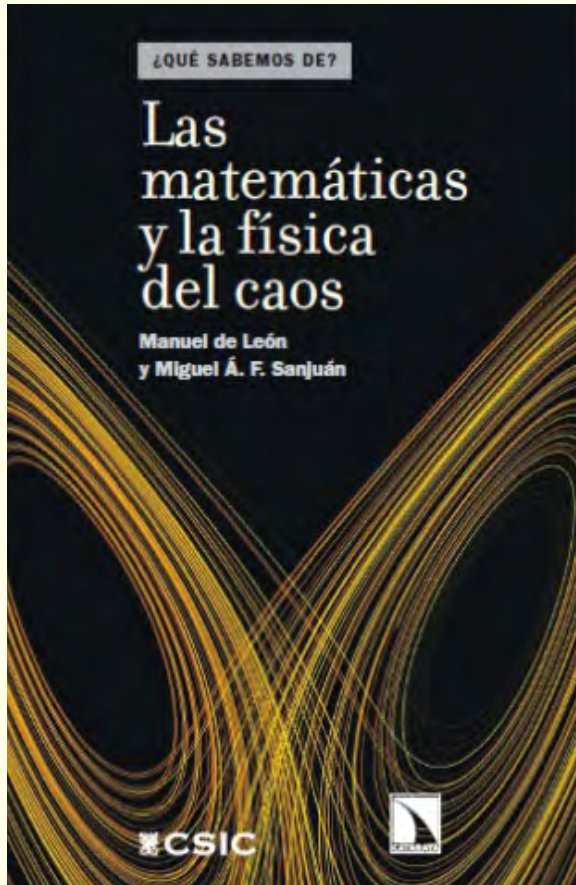
# Doctorado Honoris Causa URJC 2014







Para saber más



## Blog Complejidad:

Exploraciones en la Ciencia de los  
Sistemas Complejos

<http://www.madrimasd.org./blogs/complejidad/>

[https://twitter.com/MAF\\_Sanjuan](https://twitter.com/MAF_Sanjuan)