P1. Los raíles del ferrocarril

El ferrocarril (de “hierro” y “carril”) es el camino de dos carriles paralelos por el que circulan los trenes, aunque la palabra también significa “tren”. A estos carriles se les llama rieles, raíles o vías. Son barras de acero, con la parte superior un poco redondeada, que soportan el peso del tren y guían las ruedas. Los raíles son un elemento básico del sistema ferroviario, ya que sobre ellos deben circular los trenes de forma segura y estable. Por eso, es crucial un buen diseño y un mantenimiento constante de las vías.

Traqueteo y dilatación térmica

Hasta la segunda mitad del siglo XX, las líneas de ferrocarril se construían “a tramos”, es decir, mediante una sucesión de raíles cortos independientes. Cada uno se unía al siguiente con placas y tornillos, dejando entre ellos un pequeño espacio denominado *junta de dilatación*. Este diseño respondía a un motivo: el acero se expande y se contrae con los cambios de temperatura, y esas juntas permitían absorber dichas variaciones, evitando deformaciones en la vía. El famoso “traqueteo” que se oía al pasar el tren (ese ritmo de *clac-clac, clac-clac*) se producía justamente porque las ruedas golpeaban ligeramente cada una de las juntas. Era un sonido muy característico de los trenes de antes y todavía hoy puede oírse en algunas líneas antiguas que no se han renovado[1].

Un pasajero está haciendo un viaje en tren por una línea antigua y oye el traqueteo de las ruedas aproximadamente cada 0,7 segundos. Como es aficionado al ferrocarril, sabe que los tramos de esa vía miden 12 m. Con esos datos es capaz de estimar la velocidad del tren.

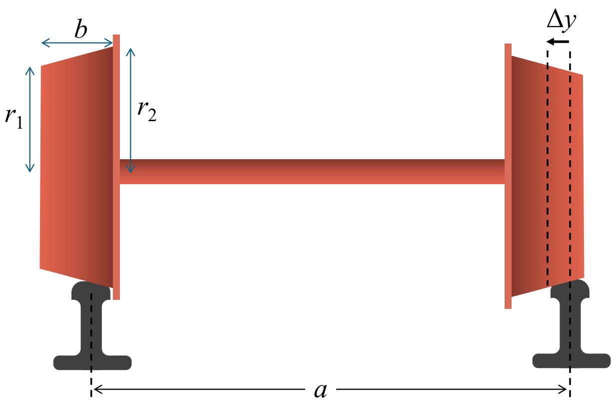
a) ¿Cuál es la velocidad que estima el pasajero?

La dilatación térmica de un cuerpo unidimensional sigue la ley: $\Delta L / L = \alpha \Delta T$, donde L es la longitud del cuerpo, ΔL es la variación de longitud debida a un cambio de temperatura ΔT, y α es el coeficiente de dilatación lineal. Para el acero $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/ºC.

b) Calcula el ancho mínimo que han de tener las juntas sabiendo que en esa región la temperatura oscila entre 0 ºC y 40 ºC.

Ruedas cónicas

Las ruedas del tren no son cilíndricas como monedas, sino troncocónicas, con forma de maceta y con mayor diámetro en la cara que da hacia el interior de las vías. Así, la banda de rodadura —es decir, el canto que apoya en el raíl— no es horizontal, sino inclinada. Si el tren se desplaza un poco hacia un lado, la rueda de ese lado pisa una parte de mayor diámetro, recorre más distancia y el tren se corrige solo, volviendo al centro. Esta geometría cónica sirve también para que el tren gire con estabilidad en las curvas.



[1] Hoy en día, las vías están soldadas formando tramos continuos de cientos de metros. La dilatación térmica genera fuerzas internas que son soportadas por la fijación de las vías a las traviesas.

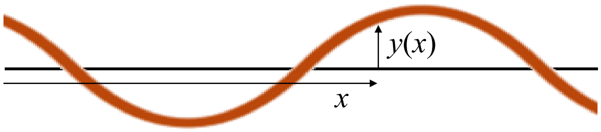
Considera una rueda troncocónica de radio menor r_1, radio mayor r_2 y radio medio r_0. El ancho de la rueda es b y su conicidad es $\tan\beta = (r_2 - r_1)/b$. El ancho de la vía es a. Suponemos que las ruedas no patinan sobre los raíles. En condiciones normales, cada rueda apoya sobre el raíl en el punto central de su banda de rodadura, donde el radio es r_0. Vamos a estudiar qué ocurre si las ruedas se desplazan lateralmente una distancia Δy respecto al raíl. Las ruedas estarán apoyadas en un punto donde el radio ya no es r_0.

c) Obtén la expresión de los radios de las ruedas derecha e izquierda, r_d y r_i, en función de r_0, β y Δy. Calcula la diferencia entre las distancias recorridas sobre el raíl por la rueda izquierda y la rueda derecha en cada vuelta completa.

Supongamos que las vías describen una circunferencia de radio R.

d) Obtén cuánto vale el desplazamiento lateral Δy_R para la posición de las ruedas que permite el giro. Expresa el resultado en función de a, r_0, R y β.

Oscilaciones



Cuando el tren avanza por una vía recta experimenta una oscilación lateral llamada "movimiento de lazo", que es debida a la conicidad de las ruedas de la que depende la autoestabilidad direccional del tren. Vamos a definir mediante la función $y(x)$ la trayectoria que sigue el centro de la banda de rodadura de las ruedas respecto al centro de los raíles, donde x representa la distancia recorrida a lo largo de la vía. Puede demostrarse que la curvatura de la trayectoria está relacionada aproximadamente con la segunda derivada de y con respecto a x:

$$\left|\frac{d^2 y(x)}{dx^2}\right| \approx \frac{1}{R}$$

e) Plantea la ecuación dinámica y obtén el período de la oscilación lateral en función de las magnitudes relevantes. (Ayuda: usa el resultado del apartado anterior y plantea adecuadamente el signo de y).

f) Calcula el valor del período para un tren que circula a 100 km/h por una vía de 1,7 m de ancho, y cuyas ruedas tienen un radio de 40 cm y una conicidad de 0,05. Calcula la longitud de onda de la oscilación.

Auscultando las vías

La inspección periódica de las vías férreas permite detectar defectos —como grietas, fisuras y soldaduras defectuosas— antes de que evolucionen en fallos críticos. Uno de los métodos de inspección se basa en los ultrasonidos. Consiste en analizar los ecos de un pulso de ultrasonidos que se introduce desde la parte superior del raíl en el punto de la vía en estudio. Los ultrasonidos se emiten en dirección vertical hacia abajo y se detectan con una sonda pegada a la parte superior del raíl. Las ondas se reflejan en el extremo inferior y también en cualquier discontinuidad debida a un defecto interno. La velocidad de los ultrasonidos en el acero es $v_{ultra} = 5900$ m/s.

g) En condicions normales, sin defectos, el aparato de ultrasonidos detecta el eco de referencia 0,054 ms después de enviarse éste. En un determinado punto de la vía se registró también otro eco 0,017 ms después de enviarse el pulso. ¿Cuál es la altura de las vías? ¿A qué profundidad está la fisura?

La capacidad de detectar defectos mediante ultrasonidos depende de la relación entre el tamaño del defecto d y la longitud de onda λ utilizada. El límite práctico de detección es $d \approx \lambda/2$. Si el defecto es menor, entonces resulta indetectable.

h) ¿Cuál es la frecuencia mínima de los ultrasonidos que debemos utilizar si queremos detectar microfisuras de 1 mm de tamaño?

P1. Los raíles del ferrocarril. RESOLUCIÓN

a) Calcula la velocidad del tren.

Podemos calcular la velocidad del tren con la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme. Las juntas están separadas 12 m y el golpe de las ruedas suena cada 0,7 s. Entonces:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{12}{0{,}7} = 17{,}14 \text{ m/s} = \boxed{62 \text{ km/h}}$$

b) Calcula el ancho mínimo que han de tener las juntas.

La variación máxima de temperatura es $\Delta T = 40$ ºC. Como los tramos de las vías miden L = 12 m, utilizando el coeficiente de dilatación del acero obtenemos un incremento de longitud de cada tramo de la vía:

$$\Delta L = L\,\alpha \Delta T = 12 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 5{,}76 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx \boxed{6 \text{ mm}}$$

que es el ancho mínimo que deberían tener las juntas para permitir la dilatación.

c) Obtén los radios de las ruedas derecha e izquierda, r_d y r_i. Calcula la diferencia entre las distancias recorridas por la rueda izquierda y la rueda derecha en cada vuelta completa.

$$r_d = r_0 + \Delta y \tan\beta$$
$$r_i = r_0 - \Delta y \tan\beta$$

La distancia recorrida sobre el raíl en cada vuelta por la rueda derecha es $2\pi r_d$, y por la rueda izquierda $2\pi r_i$. Entonces, la diferencia entre las distancias recorridas por ambas ruedas es

$$\Delta d_{vuelta} = 2\pi\left(r_0 + \Delta y \tan\beta - r_0 + \Delta y \tan\beta\right) = \boxed{4\pi \Delta y \tan\beta}$$

d) Obtén cuanto vale el desplazamiento lateral Δy_R para la posición de las ruedas que permite el giro. Expresa el resultado en función de *a*, r_0, *R* y β.

Supongamos que la rueda derecha es la más próxima al centro de la circunferencia. Entonces gira sobre una circunferencia de radio $(R - a/2)$. La rueda izquierda gira sobre una circunferencia de radio $(R + a/2)$. Como los radios efectivos de giro son r_d y r_i, tenemos la proporcionalidad

$$\frac{r_i}{r_d} = \frac{R + a/2}{R - a/2} = \frac{r_0 - \Delta y \tan\beta}{r_0 + \Delta y \tan\beta} \quad \rightarrow \quad (a/2)r_0 + R\Delta y \tan\beta = -(a/2)r_0 - R\Delta y \tan\beta$$

Despejando:

$$\boxed{\Delta y_R = -\frac{a\, r_0}{2R\tan\beta}}$$

El signo es positivo si la rueda izquierda es la más próxima al centro de la circunferencia.

(Nota: Los coches tienen un mecanismo llamado "diferencial" que permite que las dos ruedas de un mismo eje giren a distintas velocidades angulares. Pero las ruedas de los trenes están unidas rígidamente al eje y giran a la misma velocidad angular. Gracias a la conicidad se genera una diferencia de radios de rodadura que permite adaptar automáticamente la velocidad lineal de cada rueda al trazado de la curva.)

e) Plantea la ecuación dinámica y obtén el período de la oscilación lateral.

Del resultado del apartado anterior concluimos que

$$\frac{1}{R} = -\frac{2\tan\beta}{a\, r_0}\, y(x)$$

donde el signo menos indica que el sistema tiende a recuperar el equilibro gracias a la conicidad; es decir, si el tren se desplaza ligeramente hacia la derecha su trayectoria se curvará hacia la izquierda y viceversa. Usando la expresión del enunciado, $\left|d^2 y(x)/dx^2\right| \approx 1/R$, llegamos a la ecuación dinámica:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{2\tan\beta}{a\,r_0}\,y(x)$$

Como $x = vt$, donde v es la velocidad del tren, hacemos el cambio de variable y obtenemos la ecuación de un MAS:

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + v^2\,\frac{2\tan\beta}{a\,r_0}\,y = 0}$$

Identificando el coeficiente de y con la frecuencia angular al cuadrado, encontramos la expresión para el período:

$$\omega^2 = \frac{2v^2\tan\beta}{a\,r_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{v}\sqrt{\frac{a\,r_0}{2\tan\beta}}}$$

(Nota: En general, la curvatura de una curva es $\dfrac{1}{R} = \dfrac{|y''(x)|}{\left(1 + y'(x)^2\right)^{3/2}}$. Para trayectorias que se desvían poco de la línea recta: $y' \approx 0$, y entonces $|y''| \approx 1/R$, como indica el enunciado.)

f) Calcula el valor numérico del período y de la longitud de onda para los datos del enunciado.

Según el enunciado, los parámetros de la vía son $a = 1{,}7$ m, $r_0 = 0{,}4$ m y $\tan\beta = 0{,}05$, y el tren circula a una velocidad $v = 100$ km/h $= 27{,}8$ m/s. Con la expresión encontrada antes, resulta el valor para el período:

$$T = \frac{2\pi}{27{,}8}\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 1{,}7}{2\cdot 0{,}05}} = \boxed{0{,}6 \text{ s}}$$

La longitud de onda es

$$\lambda = vT = 27{,}8\cdot 0{,}6 = \boxed{16{,}7 \text{ m}}$$

(Nota: La frecuencia de la oscilación es mayor cuando el tren circula más rápido.)

g) ¿Cuál es la altura de las vías? ¿A qué profundidad está la fisura?

Las ondas sonoras recorren un camino de ida y vuelta tras ser emitidas. Si se reflejan a una profundidad h y se registran un tiempo t después de ser emitidas, sabemos que

$$2h = v_{ultra}\,t \quad \rightarrow \quad h = v_{ultra}\,t/2$$

Altura de los raíles: $h = 5900\cdot 0{,}000054/2 = \boxed{16 \text{ cm}}$

Profundidad a la que se encuentra la fisura: $p = 5900\cdot 0{,}000017/2 = \boxed{5 \text{ cm}}$

h) ¿Cuál es la frecuencia mínima de los ultrasonidos para detectar microfisuras de 1 mm de tamaño?

La longitud de onda debe ser $\lambda < 2d$. Como $\lambda = v/f$, la frecuencia mínima será

$$f_{\min} = \frac{v_{ultra}}{2d} = \frac{5900}{2\cdot 0{,}001} \approx \boxed{3 \text{ MHz}}$$

(Nota: Los sistemas de ultrasonidos usados para inspeccionar carriles ferroviarios trabajan típicamente en un rango de frecuencias de 1 a 5 MHz.)