

## P2. Los anillos de Saturno

Cuando Galileo apuntó su telescopio hacia Saturno en 1610, vio algo que no supo explicar: el planeta parecía tener “orejas”. Pasaron cincuenta años hasta que Huygens reconoció que eran anillos: un disco de innumerables fragmentos de hielo, cada uno en su propia órbita, que se extienden una distancia comparable a la que separa la Tierra de la Luna, pero con apenas diez metros de grosor.

### Constantes físicas y datos:

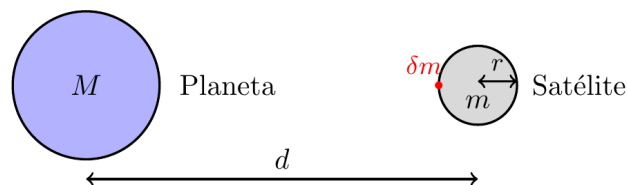
- Constante gravitacional:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$
- Radio medio de Saturno:  $R_S = 58232 \text{ km}$
- Densidad media de Saturno:  $\rho_S = 687 \text{ kg/m}^3$
- Densidad del hielo poroso:  $\rho_{hielo} = 600 \text{ kg/m}^3$



En todo el problema puedes usar la aproximación  $(1+x)^n \approx 1+nx$  cuando  $|x| \ll 1$ .

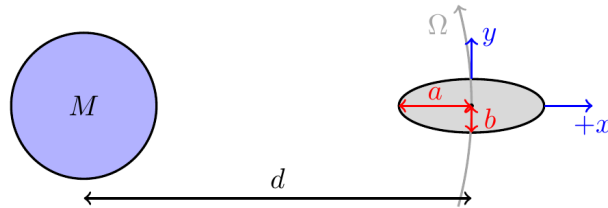
Una de las hipótesis sobre el origen de los anillos es que se formaron a partir de la desintegración de un cometa que pasó muy cerca. Por simplicidad, en lugar de un cometa vamos a considerar un pequeño satélite esférico formado por partículas sueltas —como un montón de escombros— que se mantiene unido solo por su propia gravedad y que está en el campo gravitacional de un planeta. El planeta atrae con más fuerza al lado cercano del satélite que al lejano. Si el satélite orbita demasiado cerca, esta diferencia de fuerzas puede romperlo, dispersando los fragmentos a lo largo de la órbita hasta formar un anillo. La distancia crítica a la que esto ocurre es el *límite de Roche*.

El satélite tiene masa  $m$ , radio  $r$  y densidad uniforme  $\rho_m$ , y orbita, sin rotar sobre sí mismo, un planeta de masa  $M$ , radio  $R$  y densidad  $\rho_M$  a una distancia centro a centro  $d$ . Supón que  $r \ll d$  y simplifica las expresiones resultantes con esta aproximación siempre que se pueda.



- Considera una masa de prueba  $\delta m$  en la superficie del satélite, en el punto más cercano al planeta. ¿Cuál es la fuerza gravitacional *del satélite* sobre  $\delta m$ ?
- Calcula la fuerza de marea *del planeta* sobre esta masa de prueba, definida como la diferencia entre la fuerza de atracción que ejerce el planeta sobre  $\delta m$  y sobre una masa igual en el centro del satélite.
- Halla el límite de Roche,  $d_{\text{Roche}}$ : la distancia desde el centro del planeta al centro del satélite a la que la masa de prueba deja de estar ligada al satélite y este empieza a romperse; exprésala en términos de  $R$ ,  $\rho_M$  y  $\rho_m$ . Calcula su valor numérico para un satélite de hielo poroso alrededor de Saturno.

Hasta ahora hemos ignorado tanto la deformación del satélite como su posible rotación. Considera ahora un satélite fluido e incompresible —un cuerpo sin rigidez interna, como una gota de agua en el espacio, unido solo por su propia gravedad— en órbita circular y con rotación síncrona (siempre muestra la misma cara al planeta). Bajo estas condiciones, el satélite se alargará en un esferoide prolato (como un balón de rugby), con su eje mayor apuntando hacia el planeta.



- d) Para un satélite fluido que se alarga bajo las mareas, deduce cualitativamente si el límite de Roche será menor, igual o mayor que el calculado en c).

Vamos a estudiar la deformación que sufre el satélite fluido. Para ello, es más sencillo trabajar en un sistema de referencia no inercial que gira con el satélite, a velocidad angular  $\Omega$ , alrededor del planeta. En este sistema corrotante el satélite está en reposo y la aceleración centrípeta se experimenta como una aceleración centrífuga —hacia afuera.

- e) Determina la aceleración centrífuga de un punto situado a una distancia  $x$  del centro del satélite, con  $x \geq 0$  en la dirección que se aleja del planeta —en términos de  $G, M, d$  y  $x$ .

En el sistema corrotante, la deformación del satélite se debe a la combinación de la fuerza gravitatoria del planeta y de la fuerza centrífuga.

- f) Demuestra que la aceleración neta de un punto situado a distancia  $x$  del centro del satélite, resultante de la combinación de la aceleración gravitacional y la centrífuga, se puede derivar de un potencial de la forma  $V_T(x) = Px^2 + const$ . Determina  $P$  en términos de  $G, M$  y  $d$ .

La superficie de un fluido en equilibrio, como es el caso del satélite, debe ser equipotencial ( $V = cte.$ ) —si no, el fluido fluiría. Como  $V_T \propto x^2$ , el equilibrio requiere que el potencial autogravitacional también varíe como  $x^2$  en la superficie. Esto ocurre si el satélite es un elipsoide. Dentro de un elipsoide uniforme con semiejes  $a, b, c$  y densidad  $\rho$ , el potencial gravitacional es

$$V_S(x, y, z) = \pi G \rho (A_a x^2 + A_b y^2 + A_c z^2) + const$$

donde  $A_a, A_b$  y  $A_c$  son coeficientes positivos que dependen de las proporciones de los ejes y cumplen  $A_a + A_b + A_c = 2$ .

- g) Supón que el satélite se alarga en un esferoide prolato con semieje mayor  $a$  (a lo largo de  $x$ ) y semiejes menores iguales,  $b = c$  (a lo largo de  $y$  y  $z$ ). Su superficie cumple:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b = c$$

Demuestra que el potencial autogravitacional *en la superficie* se puede escribir como

$$V_S|_{\text{superficie}} = const + \pi G \rho_m f(\varepsilon) x^2$$

donde  $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  es la excentricidad del esferoide. Halla  $f(\varepsilon)$  en términos de  $A_a, A_b$  y  $\varepsilon$ .

- h) ¿A qué formas corresponden  $\varepsilon = 0$  y  $\varepsilon \rightarrow 1$ ? Calcula  $f(0)$  y  $f(1)$ . Sabiendo que la función tiene un único máximo en  $\varepsilon_c = 0,86$  con valor  $f_{\max} = 0,14$ , dibuja  $f(\varepsilon)$ .
- i) Deriva una expresión para el límite de Roche de un satélite fluido,  $d_{\text{fluido}}$ . Calcula su valor para un satélite de hielo poroso alrededor de Saturno.
- j) Considera ahora una pequeña partícula esférica opaca de los anillos, permanentemente expuesta al Sol y que refleja una fracción  $A = 0,6$  de la luz que recibe (el albedo). Como todo cuerpo a temperatura  $T$ , también emite radiación térmica con una potencia por unidad de superficie  $e\sigma T^4$ , donde  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  y en este caso la emisividad es  $e \approx 1$ . Sabiendo que Saturno orbita a  $d_{\odot} = 9,5 \text{ UA}$  del Sol y que el flujo solar a una distancia equivalente a la distancia del Sol a la Tierra (1 UA) es  $F_0 = 1,36 \text{ kW/m}^2$ , calcula la temperatura de la partícula.

## P2. Los anillos de Saturno. RESOLUCIÓN

a) ¿Cuál es la fuerza gravitacional *del satélite* sobre  $\delta m$  ?

$$F_{\text{propia}} = \frac{Gm \delta m}{r^2}$$

Esta fuerza apunta hacia el centro del satélite.

b) **Calcula la fuerza de marea *del planeta* sobre esta masa de prueba.**

La fuerza gravitacional sobre la masa de prueba (a distancia  $d - r$  del planeta) es

$$F_{\text{planeta}} = \frac{GM \delta m}{(d - r)^2}$$

Expandiendo:

$$\frac{1}{(d - r)^2} = \frac{1}{d^2} \left(1 - \frac{r}{d}\right)^{-2} \approx \frac{1}{d^2} \left(1 + \frac{2r}{d}\right)$$

La fuerza gravitacional en el centro del satélite es  $GM \delta m/d^2$ . La fuerza de marea es la diferencia:

$$F_{\text{marea}} = \frac{GM \delta m}{d^2} \left(1 + \frac{2r}{d}\right) - \frac{GM \delta m}{d^2} = \frac{2GM \delta m r}{d^3}$$

Esta fuerza apunta hacia el planeta (alejándose del centro del satélite).

c) **Halla el límite de Roche. Calcula su valor numérico para un satélite de hielo poroso.**

En el límite de Roche,  $F_{\text{propia}} = F_{\text{marea}}$ :

$$\frac{Gm}{r^2} = \frac{2GM r}{d^3}$$

Sustituyendo  $m = 4/3 \pi r^3 \rho_m$  y  $M = 4/3 \pi R^3 \rho_M$ , queda:

$$\frac{G \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_m}{r^2} = \frac{2G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_M \cdot r}{d^3}$$
$$\rho_m = \frac{2R^3 \rho_M}{d^3} \rightarrow d^3 = 2R^3 \frac{\rho_M}{\rho_m}$$

$$d_{\text{Roche}} = 2^{1/3} R \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} = 1,26 R \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3}$$

Para hielo poroso alrededor de Saturno ( $\rho_S = 687 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_m = 600 \text{ kg/m}^3$ ,  $R_S = 58\,232 \text{ km}$ ):

$$d_{\text{Roche}} \approx 76\,800 \text{ km} \approx 1,32 R_S$$

Este valor es menor que el borde exterior de los anillos principales ( $\approx 137\,000 \text{ km}$ ): el modelo sin deformación subestima el límite de Roche.

El anillo E se extiende mucho más lejos ( $\approx 480\,000 \text{ km}$ ), pero no se explica por fuerzas de marea: sus partículas micrométricas son reabastecidas continuamente por los géiseres de Encélado, y en su dinámica influyen la presión de radiación solar y fuerzas electromagnéticas.

d) **Para un satélite fluido, deduce cualitativamente si el límite de Roche será menor, igual o mayor que el calculado en c).**

Cuando el satélite se alarga hacia el planeta, su punta cercana se aleja del centro del satélite y se acerca al planeta. La autogravedad que sujeta esta punta disminuye, mientras que la fuerza de marea aumenta. Por tanto,

$$d_{\text{fluido}} > d_{\text{Roche}}$$

- e) **Determina la aceleración centrífuga de un punto situado a una distancia  $x$  del centro del satélite, con  $x \geq 0$  en la dirección que se aleja del planeta —en términos de  $G$ ,  $M$ ,  $d$  y  $x$ .**

El satélite y el sistema corrotante no inercial giran en la órbita circular con velocidad angular  $\Omega = \sqrt{GM/d^3}$ . La aceleración centrífuga (equivalente a la aceleración centrípeta en un sistema inercial situado en el planeta) es

$$a_{\text{cent}} = \Omega^2(d+x) = \frac{GM}{d^3}(d+x) = \frac{GM}{d^2} + \frac{GM}{d^3}x$$

El término constante  $GM/d^2$  cancela exactamente la aceleración gravitacional del planeta en el centro del satélite.

- f) **Demuestra que la aceleración neta se puede derivar de un potencial de la forma  $V_T(x) = Px^2 + \text{const.}$  Determina  $P$  en términos de  $G$ ,  $M$  y  $d$ .**

La gravedad del planeta sobre un punto a desplazamiento  $x$  (a distancia  $d+x$  del planeta) es

$$a_{\text{grav}} = \frac{GM}{(d+x)^2} \approx \frac{GM}{d^2} - \frac{2GM}{d^3}x \quad (\text{en dirección } -x, \text{ hacia el planeta})$$

La aceleración centrífuga es

$$a_{\text{cent}} = \frac{GM}{d^2} + \frac{GM}{d^3}x \quad (\text{en dirección } +x, \text{ alejándose del planeta})$$

La aceleración neta en la dirección  $+x$ :

$$a_{\text{neto}} = \left(\frac{GM}{d^2} + \frac{GM}{d^3}x\right) - \left(\frac{GM}{d^2} - \frac{2GM}{d^3}x\right) = \frac{3GM}{d^3}x$$

(Positivo para  $x > 0$ : un punto desplazado en dirección opuesta al planeta acelera alejándose de él.) La marea estira el satélite. Para el potencial,  $a_{\text{neto}} = -dV_T/dx$ :

$$\frac{3GM}{d^3}x = -\frac{dV_T}{dx} \Rightarrow$$

$$V_T(x) = -\frac{3GM}{2d^3}x^2 + \text{const}$$

El coeficiente negativo indica que el potencial es menor lejos del centro —la marea arrastra material hacia afuera a lo largo del eje planeta-satélite.

- g) **Demuestra que el potencial autogravitacional en la superficie se puede escribir como**

$$V_S|_{\text{superficie}} = \text{const} + \pi G \rho_m f(\varepsilon) x^2$$

donde  $\varepsilon = \sqrt{1-b^2/a^2}$  es la excentricidad del esferoide. Halla  $f(\varepsilon)$  en términos de  $A_a$ ,  $A_b$  y  $\varepsilon$ .

Como  $b = c$  (las direcciones  $y$  y  $z$  son equivalentes), por simetría:  $A_b = A_c$ .

En la superficie:  $y^2 + z^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$

Sustituyendo en el potencial interior:

$$V_S|_{\text{superficie}} = \pi G \rho_m [A_a x^2 + A_b y^2 + A_c z^2] + \text{const}$$

$$\begin{aligned}
 V_S|_{\text{superficie}} &= \pi G \rho_m [A_a x^2 + A_b (y^2 + z^2)] + \text{const} \\
 &= \pi G \rho_m \left[ A_a x^2 + A_b b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] + \text{const} \\
 &= \pi G \rho_m A_b b^2 + \pi G \rho_m \left( A_a - \frac{A_b b^2}{a^2} \right) x^2 + \text{const}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f(\varepsilon) = A_a - A_b \frac{b^2}{a^2} = A_a - A_b (1 - \varepsilon^2)$$

(Usando  $b^2/a^2 = 1 - \varepsilon^2$  de la definición de excentricidad.)

**h) ¿A qué formas corresponden  $\varepsilon = 0$  y  $\varepsilon \rightarrow 1$ ? Calcula  $f(0)$  y  $f(1)$ . Sabiendo que la función tiene un único máximo en  $\varepsilon_c = 0,86$  con valor  $f_{\max} = 0,14$ , dibuja  $f(\varepsilon)$ .**

De la definición  $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ :

- $\varepsilon = 0$  implica  $b = a$ : todos los semiejes son iguales, es una **esfera**.
- $\varepsilon \rightarrow 1$  implica  $b \rightarrow 0$  con  $a \rightarrow \infty$  (puesto que hemos asumido que  $b = c$  y que el fluido es incompresible y, por lo tanto, debe tener un volumen constante): el elipsoide se vuelve infinitamente alargado —forma de **aguja**.

Para una esfera, las tres direcciones son equivalentes por simetría, así que  $A_a = A_b = A_c$ . Como  $A_a + A_b + A_c = 2$ , obtenemos  $3A_a = 2$  y finalmente

$$A_a = A_b = A_c = 2/3$$

Para la esfera,  $b = a$ , así que  $b^2/a^2 = 1$ , y de la fórmula:

$$f(0) = 2/3 - 2/3 \times 1 = 0$$

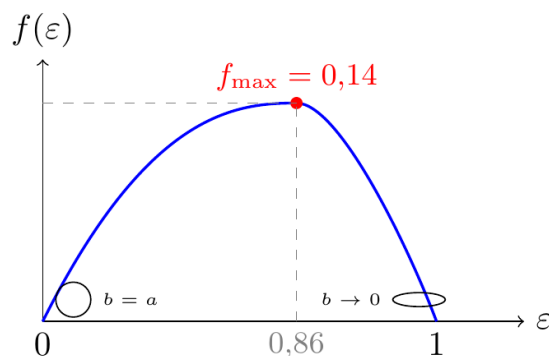
Una esfera tiene potencial constante en su superficie —no hay variación con  $x^2$ .

(Cuando  $\varepsilon \rightarrow 1$  el esferoide se vuelve una aguja ( $a \rightarrow \infty$ ):  $A_a \rightarrow 0$ , porque el potencial de la masa constante no puede crecer como  $x^2$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . De  $A_a + 2A_b = 2$  se deduce  $A_b \rightarrow 1$ . Como  $(1 - \varepsilon^2) \rightarrow 0$ , el producto  $A_b(1 - \varepsilon^2) \rightarrow 0$ , dando

$$f(1) = 0$$

La variación  $x^2$  del potencial en la superficie desaparece —el potencial se vuelve casi constante a lo largo de la aguja.

Gráfica de  $f(\varepsilon)$ :



- i) **Deriva una expresión para el límite de Roche de un satélite fluido,  $d_{\text{fluido}}$ . Calcula su valor para un satélite de hielo poroso alrededor de Saturno.**

La superficie de un fluido en equilibrio es equipotencial. El potencial total en la superficie es  $V|_{\text{sup}} = (P + \pi G \rho_m f(\epsilon)) x^2 + \text{const.}$  Para que sea constante:

$$f(\epsilon) = |P|/\pi G \rho_m$$

Al acercarse al planeta,  $|P|$  crece, requiriendo mayor  $f$ . Pero  $f \leq f_{\text{max}}$ , así que existe una distancia mínima dada por  $|P| = \pi G \rho_m f_{\text{max}}$ . Sustituyendo  $P = -3GM/2d^3$  y  $M = 4/3 \pi R^3 \rho_M$ , queda

$$\frac{2\pi G R^3 \rho_M}{d^3} = \pi G \rho_m f_{\text{max}}$$

$$d_{\text{fluido}} = R \left( \frac{2\rho_M}{\rho_m f_{\text{max}}} \right)^{1/3}$$

Con  $f_{\text{max}} = 0,14$ , el límite de Roche resulta

$$d_{\text{fluido}} = R \left( \frac{2}{0,14} \right)^{1/3} \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} = 2,43 R \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3}$$

Para hielo poroso alrededor de Saturno:

$$d_{\text{fluido}} = 2,43 \cdot 58\,232 \text{ km} \cdot (687/600)^{1/3} \approx 148\,000 \text{ km}$$

El borde exterior del sistema principal de anillos de Saturno está a  $\approx 137\,000 \text{ km}$ .

- j) **Calcula la temperatura de la partícula.**

El flujo solar disminuye con el cuadrado de la distancia. A la distancia 9,5 UA:

$$F = F_0 \left( \frac{1 \text{ UA}}{d_{\odot}} \right)^2 = \frac{1,36 \times 10^3}{9,5^2} \approx 15,1 \text{ W/m}^2$$

Si  $r_p$  es el radio de la partícula, ésta intercepta luz sobre su sección transversal  $\pi r_p^2$  y emite radiación térmica sobre toda su superficie  $4\pi r_p^2$ . Al ser una partícula pequeña se puede suponer isoterma. En equilibrio, la potencia absorbida iguala la emitida:

$$(1 - A) F \pi r_p^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi r_p^2$$

El radio  $r_p$  se cancela —la temperatura no depende del tamaño:

$$T = \left[ \frac{(1 - A) F}{4 \sigma} \right]^{1/4} = \left[ \frac{0,4 \times 15,1}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}} \right]^{1/4} = [2,66 \times 10^7]^{1/4}$$

$$T \approx 72 \text{ K} \approx -201 \text{ }^\circ\text{C}$$

(Las mediciones de Cassini dan un intervalo de temperatura entre 70 y 110 K, consistente con nuestro resultado.)