P3. Salto griego

Autores clásicos como Heródoto, Plutarco, Aristófanes y Pausanias, cuentan que en el siglo V a. C. un atleta griego llamado Phayllos (Faílo de Crotona) estableció un récord de salto de longitud durante el pentatlón de los juegos délficos. El pentatlón consistía en 5 pruebas: carrera, lanzamiento de jabalina, lanzamiento de disco, salto de longitud y competición de lucha libre. La hazaña de Phayllos quedó registrada en el siguiente epigrama: “Phayllos saltó 5 pies más de 50 pies y lanzó el disco 5 pies menos de 100 pies” (*Antología Palatina*, Apéndice 297). Un pie délfico medía 29,6 cm, lo que implica que Phayllos saltaba 16,28 m y lanzaba el disco a 28,12 m. Si bien el rendimiento en el lanzamiento de disco parece aceptable hoy en día, dada la técnica y los pesos utilizados en la antigüedad, el salto de longitud ha sido motivo de controversia dado que ningún atleta moderno es capaz de saltar esa distancia.

Vasija griega del año 540 a. C. que muestra a un atleta realizando un salto de longitud con pesas (halteras) en las manos.

Halteras de un saltador de longitud griego.

Tras estudiar abundantes fuentes, tanto escritas como pictóricas, muchos autores concluyen que el salto de longitud se realizaba estando el atleta parado en el suelo y llevando pesas (o halteras) en las manos durante el salto. La forma en que se realizaba el salto y cómo estas pesas ayudaban al atleta durante el mismo ha sido objeto de debate durante mucho tiempo. Diversos autores sugieren que el atleta balanceaba los brazos estando parado en el suelo, realizaba el salto y, una vez que se encontraba en el aire, lanzaba hacia atrás las halteras para aumentar la longitud del salto. Además, según algunos autores, los atletas realizaban tres saltos (o cinco saltos según otros) seguidos, y la distancia computada era la suma de todos los saltos.

El análisis preciso del salto griego es muy complejo, e implica conocimientos avanzados de mecánica y biomecánica. En este problema vamos a analizar modelos muy simplificados para estudiar dos tipos de salto. Primero analizaremos un salto sin carrera, con ambos pies en reposo sobre el suelo sin halteras. Posteriormente analizaremos el salto al estilo griego, en las mismas condiciones que el anterior, pero con halteras en las manos que son lanzadas por el atleta durante el vuelo. Queremos saber si saltar con halteras es una ventaja o no. En todo el problema despreciaremos la influencia del aire sobre el saltador y tomaremos para la aceleración de la gravedad el valor $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Para estudiar los movimientos del atleta y las halteras durante el salto, es necesario utilizar el concepto de ***centro de masas***, que introduciremos a continuación. Dado un sistema de n partículas, cada una de masa m_i y vector de posición $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$, el centro de masas (CM) del sistema se define como el punto del espacio dado por el vector

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right), \text{ donde } M = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ es la masa total del sistema de partículas.}$$

El CM de un sistema que contiene barras (rígidas, homogéneas y muy delgadas) y partículas con masa se obtiene considerando que cada barra es equivalente a una partícula que tiene la masa de la barra y está en el centro geométrico de la barra. A continuación, se calcula la posición del CM del sistema a partir de estas partículas equivalentes a las barras, junto con las masas puntuales que forman también parte del sistema.

En las figuras 1 a 5 se muestra un modelo biomecánico muy simplificado de atleta. Consideraremos que las piernas, el tronco (incluyendo cuello y cabeza) y los brazos son barras rígidas homogéneas y muy delgadas. Además, las únicas articulaciones son las de los brazos con el tronco (hombros) y las piernas con el tronco (caderas). En todas las figuras se indica la posición del CM del sistema con un círculo negro. En todos los cálculos despreciaremos las dimensiones horizontales del tronco del atleta.

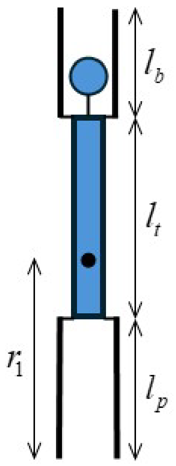

Figura 1

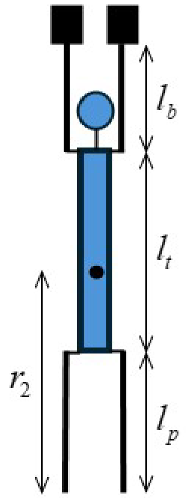

Figura 2

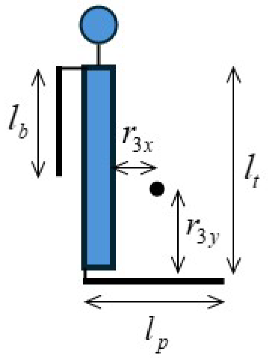

Figura 3

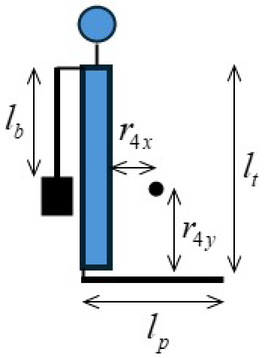

Figura 4

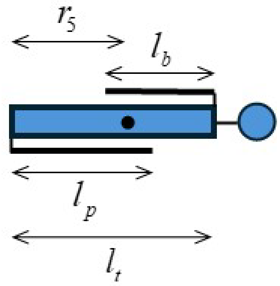

Figura 5

La figura 1 muestra una vista frontal del atleta con el cuerpo estirado y sin las halteras; la 2 es la misma figura que la 1 pero con halteras en las manos del atleta. La figura 3 muestra una vista lateral del atleta en el punto más alto de su trayectoria en el salto; la 4 es la misma figura que la 3 pero con halteras en las manos. La figura 5 muestra una vista lateral del atleta justo en el momento en el que toma tierra tras el salto. Las longitudes de piernas, tronco y brazos son respectivamente l_p, l_t y l_b. La altura del atleta es $l = 1{,}80$ m (distancia desde los pies hasta la parte superior de la cabeza), las piernas miden $l_p = 0{,}55\,l$, el tronco $l_t = 0{,}3\,l$ y los brazos $l_b = 0{,}4\,l$. El atleta tiene una masa $m = 75$ kg, la masa total de ambas piernas es $0{,}35\,m$, la masa del tronco es $0{,}55\,m$, y la total de ambos brazos es $0{,}10\,m$. Para simplificar el cálculo, consideraremos que las masas del cuello y la cabeza están incluidas en la masa del tronco. La masa total de las dos halteras es $m_h = 0{,}05\,m$.

a) Obtén la posición del CM del atleta de las figuras 1, 2 y 5 calculando las distancias r_1, r_2 y r_5.

Consideremos un tiro parabólico en el plano XY de una masa puntual lanzada desde el punto (x_0, y_0) con una velocidad inicial de módulo v_0 (llamaremos *celeridad* al módulo de la velocidad) y formando un ángulo θ respecto de la horizontal. El eje X es horizontal, creciente hacia la derecha, y está sobre el suelo; el eje Y es vertical y creciente hacia arriba. El origen de coordenadas está en el suelo. Se puede demostrar que el ángulo de lanzamiento con el que se logra el alcance máximo (es decir, la distancia máxima horizontal hasta que la masa cae al suelo) y dicho alcance máximo son

$$\theta_{max} = \arctan \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g\,y_0}}, \quad x_{max} = x_0 + \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2g\,y_0}$$

Analicemos ahora el salto del atleta sin halteras[1]. El movimiento de un sistema de sólidos rígidos, en el que las fuerzas internas entre las partes del sistema cumplen la tercera ley de Newton (como nuestro modelo de atleta), cumple la segunda ley de Newton para sistemas de partículas: la suma de las fuerzas externas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del CM. Esto implica que las fuerzas internas de ese tipo no pueden acelerar el CM del sistema, y por tanto podemos estudiar el movimiento del atleta a partir del movimiento de su CM.

[1] En este problema no tendremos en cuenta ni rotaciones ni conservación del momento angular.

Con respecto a la técnica de salto supondremos que, en el momento del salto, el cuerpo del atleta está completamente estirado (es decir, en la posición de la figura 1) formando un ángulo $\alpha_0 = 25^{\circ}$ con respecto al suelo (ver figura 6). Experimentalmente, analizando el rendimiento de un grupo de saltadores, se comprueba que este valor es cercano al óptimo (en sentido biomecánico) para este tipo de salto. Para ese grupo de saltadores, la celeridad promedio del CM del atleta en el momento del salto es $v_0 = 3{,}5\ \text{m/s}$. Para calcular la longitud del salto, consideraremos que, en el momento de tomar tierra, el atleta está colocado como en la figura 5. Así, el punto de contacto del atleta con el suelo es el extremo de la pierna (es decir, los dedos del pie). Tras contactar con el suelo, el atleta gira hacia adelante, de forma que el punto de contacto anterior es el que determina la longitud total del salto. Haremos la aproximación de que, cuando el atleta contacta con el suelo, el tronco, las piernas y los brazos están alineados a la misma altura y en horizontal.

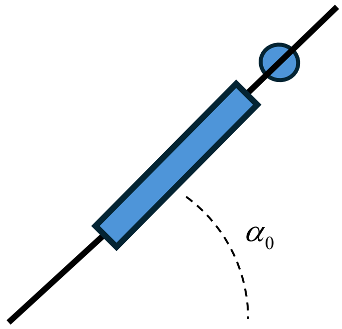

Figura 6

b) Considera el atleta sin halteras. Sabiendo que en el salto su CM describe el mismo movimiento que un tiro parabólico, y aplicando las condiciones para que el alcance horizontal del CM del atleta sea máximo, calcula el ángulo θ_{max} respecto a la horizontal que debe tener la celeridad inicial del CM del atleta, y calcula la longitud máxima del salto d_{salto}.

Ahora estudiaremos el salto con halteras. Es evidente que, si el atleta tiene las halteras en las manos, la celeridad inicial del salto será menor que cuando no las tiene. Esto se debe a que la energía interna que proviene de los músculos del atleta es la misma en ambos casos, y con las halteras la masa total es mayor. Por tanto, en este caso ya no se cumple que la celeridad inicial del CM del atleta es $v_0 = 3{,}5\ \text{m/s}$, ahora es inferior.

c) Calcula v'_0, la celeridad inicial del atleta con las halteras en las manos. Para ello, considera que la energía mecánica que tiene el atleta justo en el momento del salto es la misma con y sin halteras. Supón que el ángulo inicial del cuerpo respecto del suelo es el mismo que sin las halteras.

Ahora vamos a calcular la longitud total del salto con halteras cuando el atleta las suelta durante el vuelo. Haremos las siguientes hipótesis simplificadoras:

- El atleta en el momento del salto tiene las halteras en las manos (es decir, en el extremo de cada brazo) como en la figura 2. El salto se inicia como muestra la figura 6, y el ángulo del cuerpo del atleta respecto del suelo es el mismo que sin las halteras, $\alpha_0 = 25^{\circ}$.
- El atleta realiza el salto con celeridad inicial de su CM v'_0, con un ángulo respecto de la horizontal dado por el óptimo, es decir, θ'_{max}.
- El atleta con las halteras vuela tras el salto, y cuando su CM llega al punto más alto de su trayectoria, está colocado como se muestra en la figura 4. Sea $P_1(x_1, y_1)$ dicho punto, y sea $\vec{v}_1$ la velocidad del CM del atleta con las halteras en ese punto.
- En el punto P_1 el atleta hace un rápido giro de muñecas y lanza las halteras con celeridad $v_h = 15\ \text{m/s}$ respecto al suelo, orientada hacia atrás y formando un ángulo $\beta = 45^{\circ}$ por debajo de la horizontal (ver figura 7).
- Consideramos despreciable la diferencia de la posición del CM entre las figuras 3 y 4 (es decir, $r_{3x} \approx r_{4x}$, $r_{3y} \approx r_{4y}$).
- Tras el lanzamiento, sea $\vec{v}_2$ la velocidad del CM del atleta sin las halteras en el punto P_1.
- El resto del vuelo se realiza sin halteras, y el atleta cae en el suelo en la posición de la figura 5.

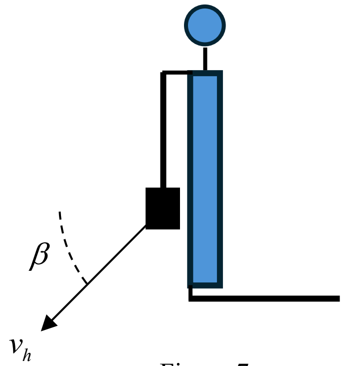

Figura 7

d) Calcula θ'_{max}.

e) Calcula x_1, y_1 y $\vec{v}_1$.

f) Cuando el atleta lanza las halteras, aplicaremos lo que en física se denomina la aproximación del impulso: durante un tiempo muy pequeño las manos del atleta ejercen una fuerza muy grande sobre las pesas, y durante este tiempo la acción de las fuerzas externas (la gravedad en este caso) es despreciable. Como resultado, la cantidad de movimiento del atleta con las halteras en las manos antes de lanzarlas es la misma que la del atleta más las halteras por separado tras el lanzamiento. Calcula $\vec{v}_2$, la velocidad del CM del atleta sin halteras tras el lanzamiento.

g) Ahora el CM del atleta, ya sin halteras, se mueve de acuerdo con las ecuaciones de un tiro parabólico desde el punto P_1 con velocidad $\vec{v}_2$. Calcula el alcance horizontal del CM del atleta desde el inicio del salto hasta que cae sobre el suelo.

h) Calcula la longitud del salto del atleta con las halteras. Compara con el resultado del salto sin halteras.

P3. Salto griego. RESOLUCIÓN

a) Obtén la posición del CM calculando las distancias r_1, r_2 y r_5.

Como las piernas, el tronco (incluyendo cuello y cabeza) y los brazos son barras rígidas, equivalen a masas puntuales ubicadas en el centro de cada barra. De acuerdo con la definición del vector de posición del CM, obtenemos:

$$r_1 = \frac{m_p\left(l_p/2\right)+m_t\left(l_p+l_t/2\right)+m_b\left(l_p+l_t+l_b/2\right)}{m_p+m_t+m_b} = 0,58625\,l = \boxed{1,055\ \text{m}}$$

$$r_2 = \frac{m_p\left(l_p/2\right)+m_t\left(l_p+l_t/2\right)+m_b\left(l_p+l_t+l_b/2\right)+m_h\left(l_p+l_t+l_b\right)}{m_p+m_t+m_b+m_h} = 0,617857\,l = \boxed{1,112\ \text{m}}$$

$$r_5 = \frac{m_p\left(l_p/2\right)+m_t\left(l_t/2\right)+m_b\left(l_t-l_b/2\right)}{m_p+m_t+m_b} = 0,18875\,l = \boxed{0,340\ \text{m}}$$

b) Calcula el ángulo θ_{max} que debe tener la celeridad inicial del CM del atleta para lograr la longitud máxima del salto, y calcula la longitud máxima del salto d_{salto}.

Situemos un sistema de referencia con origen en los pies del atleta en el momento del salto. El eje X es horizontal y creciente hacia la derecha, el eje Y es vertical y creciente hacia arriba. El CM del atleta está inicialmente en el punto $\left(x_0, y_0\right)=\left(r_1\cos\alpha_0,\, r_1\sin\alpha_0\right)$. Como $r_1 = 1,055$ m, del apartado anterior, y del enunciado sabemos que $\alpha_0 = 25^\circ$, obtenemos:

$$x_0 = 0,956\ \text{m},\quad y_0 = 0,446\ \text{m}$$

Evaluando las expresiones del alcance horizontal máximo y el ángulo para dicho alcance para la celeridad inicial $v_0 = 3,5\ \text{m/s}$, se tiene:

$$\theta_{max} = \arctan\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2g\,y_0}} \boxed{=37,38^\circ}$$

$$x_{max} = x_0 + \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2g\,y_0} = 2,592\ \text{m}$$

Finalmente, analizando la figura 5, la longitud del salto viene dada por

$$d_{salto} = x_{\max} + \left(l_p - r_5\right) = \boxed{3,242\ \text{m}}$$

c) Calcula v'_0, la celeridad inicial del atleta con las halteras en las manos.

La energía mecánica (potencial y cinética) inicial del atleta sin halteras es

$$E_{\sin} = m\,g\,\left(r_1\sin\alpha_0\right)+\frac{1}{2}m v_0^2 = 787,1\ \text{J}$$

La energía mecánica inicial del atleta con halteras, para una velocidad inicial del CM del atleta v'_0, es

$$E_{\text{con}} = \left(m+m_h\right)g\left(r_2\sin\alpha_0\right)+\frac{1}{2}\left(m+m_h\right)\left(v'_0\right)^2 = 362,7+39,38\cdot\left(v'_0\right)^2$$

Igualando ambas energías y despejando v'_0 se obtiene:

$$v'_0 = \boxed{3,28\ \text{m/s}}$$

Obviamente, se tiene que $v'_0 < v_0$.

d) Calcula θ'_{max}.

El CM del atleta está ahora inicialmente en el punto $(x'_0,\ y'_0)=(r_2\cos\alpha_0,\ r_2\sin\alpha_0)$. Sabemos del primer apartado que $r_2=1{,}112\ \text{m}$, y $\alpha_0=25^{\circ}$. Obtenemos:

$$x'_0=1{,}008\ \text{m},\ y'_0=0{,}470\ \text{m}$$

Del apartado anterior, $v'_0=3{,}28\ \text{m/s}$. Evaluando de nuevo las expresiones del alcance horizontal máximo y del ángulo se tiene:

$$\theta'_{max}=\arctan\frac{v'_0}{\sqrt{(v'_0)^2+2g\,y'_0}}=36{,}28^{\circ}$$

El ángulo óptimo es un ligeramente menor que en el salto sin halteras.

e) Calcula x_1, y_1 y $\vec{v}_1$.

Las ecuaciones de movimiento del CM del atleta desde inicio del salto con halteras hasta el punto P_1 vienen dadas por

$$\begin{cases} x(t)=x'_0+(v'_0\cos\theta'_{max})\,t=1{,}008+2{,}644t \\ y(t)=y'_0+(v'_0\sin\theta'_{max})\,t-\dfrac{1}{2}g\,t^2=0{,}470+1{,}941t-4{,}9t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x=dx/dt=2{,}644\ \text{m/s} \\ v_y=dy/dt=1{,}941-9{,}8t \end{cases}$$

El punto más alto de la trayectoria se alcanza cuando la velocidad vertical del CM del atleta más las alteras se anula:

$$v_y=1{,}941-9{,}8t=0\quad\rightarrow\quad t_1=0{,}198\ \text{s}$$

(Si bien este tiempo puede parecer muy pequeño, es razonable: el tiempo de vuelo de un saltador de longitud moderno con carrera está entre 0,85 y 0,95 s para un salto típico, en el que se recorren en el vuelo algo menos de 9 m.)

Sustituyendo el tiempo en las ecuaciones de la posición, se tiene

$$x_1=x(t_1)=1{,}532\ \text{m}$$

$$y_1=y(t_1)=0{,}662\ \text{m}$$

Y el vector velocidad del CM es $\vec{v}_1=2{,}644\vec{i}\ \ \text{m/s}$

f) Calcula $\vec{v}_2$, la velocidad del CM del atleta tras soltar las halteras.

La cantidad de movimiento del atleta más las pesas en P_1 justo antes de soltar las halteras es

$$\vec{p}_1=(m+m_h)\vec{v}_1=208{,}2\vec{i}\ \ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La cantidad de movimiento del sistema en P_1 justo después de soltar las pesas es

$$\vec{p}_2=m\vec{v}_2+m_h\vec{v}_h=m\,(v_{2x},\ v_{2y})+m_h(-v_h\cos\beta,\ -v_h\sin\beta)$$

Con la aproximación del impulso se cumple que $\vec{p}_1=\vec{p}_2$. Planteando las ecuaciones para cada componente obtenemos:

$$\begin{cases} 208{,}2=75\cdot v_{2x}-0{,}05\cdot 75\cdot 10{,}61 \\ 0=75\cdot v_{2y}-0{,}05\cdot 75\cdot 10{,}61 \end{cases}$$

Y la velocidad buscada es $\overrightarrow{v_2} = 3.31\vec{i} + 0.53\vec{j}$ m/s

g) Calcula el alcance horizontal del CM del atleta desde el inicio del salto hasta que cae al suelo.

Las ecuaciones de movimiento del atleta sin halteras son:

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + v_{2x}\,t = 1{,}532 + 3{,}31\,t \\ y(t) = y_1 + v_{2y}\,t - \dfrac{1}{2}g\,t^2 = 0{,}662 + 0{,}53\,t - 4{,}9\,t^2 \end{cases}$$

(Se ha tenido en cuenta la distancia recorrida previamente desde el salto hasta la altura máxima.)

Calculamos el tiempo para el cual $y(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t_2 = 0{,}426$ s

La distancia horizontal recorrida por el CM hasta llegar al suelo es $x_2 = x(t_2) = 2{,}941$ m

h) Calcula la longitud del salto del atleta con las halteras.

Operando igual que en b), la longitud del salto con halteras es

$$d'_{salto} = x_2 + (l_p - r_5) = 3{,}591 \text{ m}$$

La diferencia entre el salto con y sin halteras es

$$\Delta d = d'_{salto} - d_{salto} = 3{,}591 - 3{,}242 = 0{,}349 \text{ m} = 34{,}9 \text{ cm}$$

CONCLUSIÓN: Saltar con pesas reduce la velocidad inicial del salto, pero al lanzar las halteras durante el salto se consigue un impulso extra que aumenta apreciablemente la longitud del salto.

NOTA: Estrictamente la posición del CM en las figuras 3 y 4 no es exactamente la misma. Al hacer los cálculos se obtiene

$$r_{3x} = \frac{m_p(l_p/2) + m_t \cdot 0 + m_b \cdot 0}{m_p + m_t + m_b} = 0{,}09625l = 0{,}173 \text{ m}$$

$$r_{3y} = \frac{m_p \cdot 0 + m_t(l_t/2) + m_b(l_t - l_b/2)}{m_p + m_t + m_b} = 0{,}0925l = 0{,}167 \text{ m}$$

$$r_{4x} = \frac{m_p(l_p/2) + m_t \cdot 0 + m_b \cdot 0 + m_h \cdot 0}{m_p + m_t + m_b + m_h} = 0{,}09167l = 0{,}165 \text{ m}$$

$$r_{4y} = \frac{m_p 0 + m_t(l_t/2) + m_b(l_t - l_b/2) + m_h(l_t - l_b)}{m_p + m_t + m_b} = 0{,}08333l = 0{,}150 \text{ m}$$

Sin embargo, la diferencia es despreciable debido a que la masa de las pesas es pequeña en comparación con la masa del atleta. La solución de los apartados g) y h) sin realizar esa aproximación es

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + (r_{4x} - r_{3x}) + v_{2x}\,t = 1{,}524 + 3{,}31\,t \\ y(t) = y_1 + (r_{4y} - r_{3y}) + v_{2y}\,t - \dfrac{1}{2}g\,t^2 = 0{,}645 + 0{,}53\,t - 4{,}9\,t^2 \end{cases}$$

Distancia recorrida por el CM hasta llegar al suelo: $x_2 = 2{,}918$ m

Longitud del salto con halteras: $d'_{salto} = x_2 + (l_p - r_5) = 3{,}568$ m

Diferencia entre el salto con y sin halteras: $\Delta d = d'_{salto} - d_{salto} = 32{,}6$ cm

Lo que no cambia la conclusión del problema.